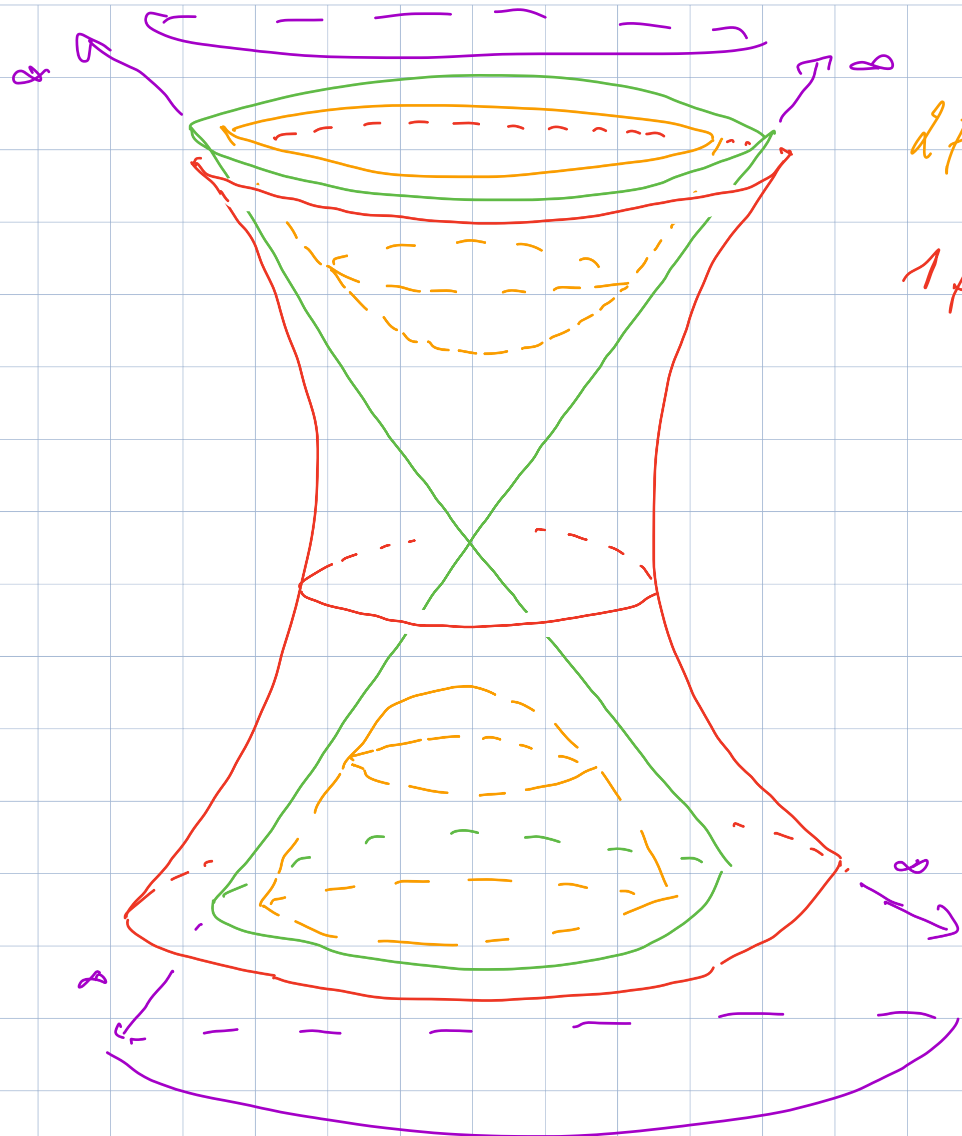
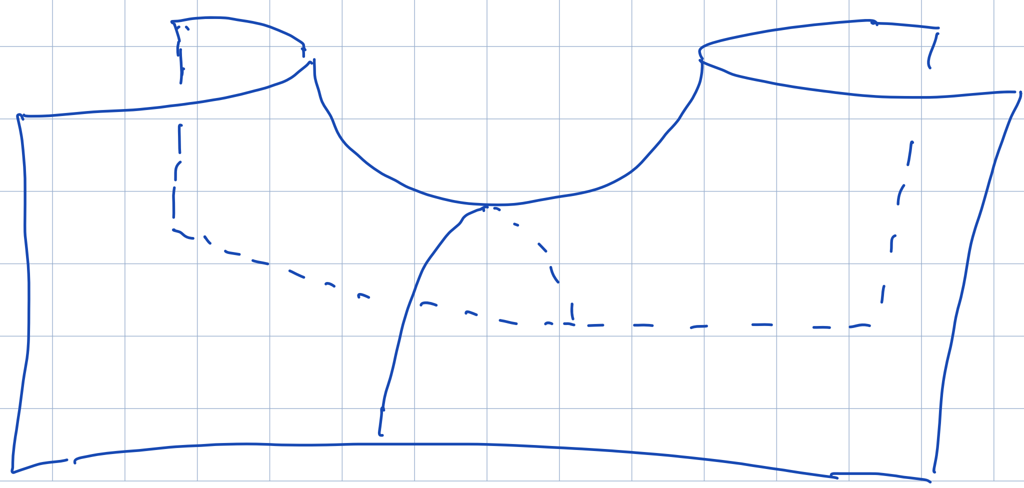
Geometria 4/5/22

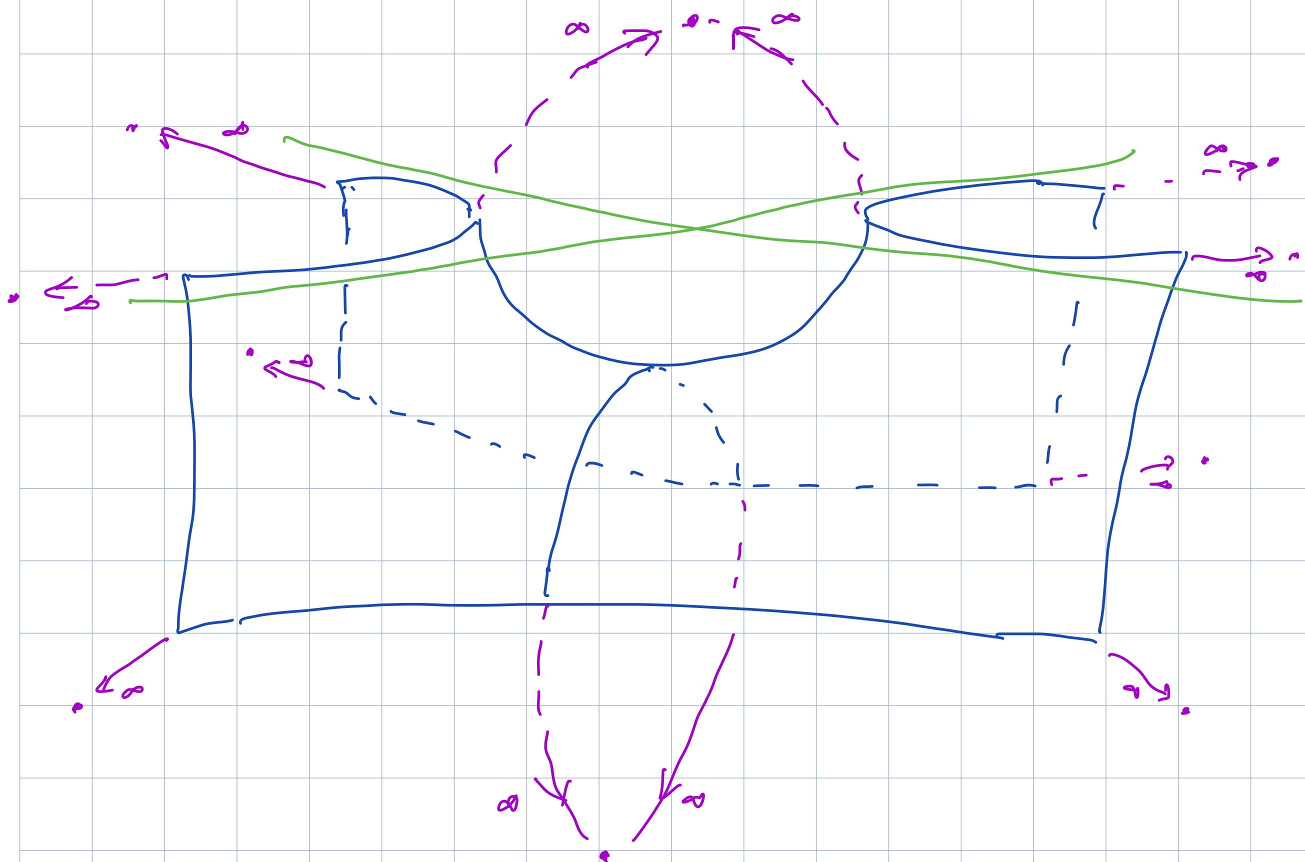
Quadrica $\mathcal{L}$ equaz. II grado x, y, z	$\overline{\mathcal{L}}$ = completamento aggiunge w $\subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$	$\mathcal{L}_\infty$ = pti all'∞ $w=0$ $\subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
iperb. ell. 2 falde $x^2+y^2+1=z^2$	$x^2+y^2+w^2=z^2$ ellissoide proiettivo	$x^2+y^2=z^2$ unica conica nondeg.
iperb. iperb. 1 falda $x^2+y^2=z^2+1$	$x^2+y^2=z^2+w^2$ iperb. proiettivo	$x^2+y^2=z^2$ unica conica nondeg.
parab. iperb. (a sella) $z = x^2-y^2$	$zw = x^2-y^2$ $\begin{cases} z = u+v \\ w = u-v \end{cases}$ $u^2-v^2 = x^2-y^2$ $u^2+y^2 = v^2+x^2$ iperb. proiettivo	$x^2-y^2=0$ $x = \pm y$ 2 rette distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



2 falde ell.

1 falda iperb.



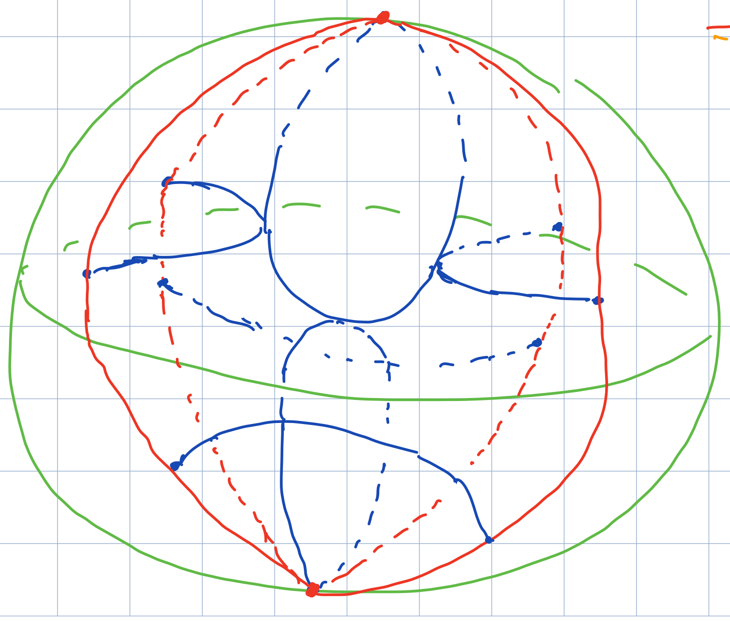


$x \longmapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \{y : \|y\| < 1\}$

$t \longmapsto \dfrac{t}{1+|t|}$

$\mathbb{R} \to (-1,1)$



Quadrica $\boxed{\text{non deg}}$:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix} \qquad A \text{ simm.}, \quad \boxed{\det(A) \neq 0}$$

Teo: a meno di cambi di segno dell'equazione i segni degli autoval di Q / A sono come segue e in ciascun caso esiste una trasf. affine che trasforma $\mathcal{L}$ nel modello corrispondente:

(1) $+++ / ++++$ $\quad x^2+y^2+z^2+1=0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\emptyset$

(2) $+++ / +++-$ $\quad x^2+y^2+z^2=1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ ellissoide

(3) $++0 / +++-$ $\quad z = x^2+y^2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ parab. ell.

(4) $++- / +++-$ $\quad x^2+y^2+1=z^2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ iperb. ell. 2 falde

(5) $++- / ++--$ $\quad x^2+y^2=z^2+1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ iperb. iperb. 1 falda

(6) $+-0 / ++--$ $\quad z = x^2-y^2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ parab. iperb.

<u>Dim</u>: tramite trasf. ortog.

$$A \rightsquigarrow {}^tM\cdot A\cdot M \qquad Q \rightsquigarrow {}^tB\cdot Q\cdot B$$

e so che i segni degli autoval. di A e Q non cambiano.

Invece $A \rightsquigarrow -A$ i segni cambiano tutti:

Come possono essere segni autoval Q?

$\boxed{+\ +\ +}$	$\boxed{+\ +\ -}$	$\boxed{+\ +\ 0}$	$\boxed{+\ -\ 0}$	$+\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$
$-\ -\ -$	$-\ -\ +$	$-\ -\ 0$		$-\ 0\ 0$	

Per concludere che l'enunciato li copre tutti devo vedere che $+00$, 000 sono impossibili: altrimenti trovo B ortog. t.c. ${}^tB\cdot Q\cdot B = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&* \end{pmatrix}$.

Se uso $M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ho

$$\underbrace{{}^tM\cdot \underbrace{A}_{\det\neq 0}\cdot M}_{\det\neq 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0&*\\0&0&0&*\\0&0&*&*\\*&*&*&* \end{pmatrix}}_{\det = 0}$$

Devo vedere che dati i 4 casi per gli autoval. di Q restano solo i casi elencati per quelli di A e che posso ricondurmi al modello_

Esattamente come per le coniche mi riconduco a

$$\begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & +1 & & 0 \\ & & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$+ + + +$	$\emptyset$
$+ + + -$	ellissoide
$+ + - +$	iperb. ell.
$+ + - -$	iperb. iperb.

nei casi in cui $\det Q \neq 0$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & 0 \\ & & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$+ + + -$	parab. ell.
$+ - + -$	parab. iperb.

nei casi in cui $\det Q = 0$

$\square$

Morale: se $\det(A) \neq 0$ sapendo i segni degli autoval. di Q e A trovo il modello.

Come trovare tali segni? [Tra poco]

Suggerimento: non imparare a memoria la tabella ma ragionare:

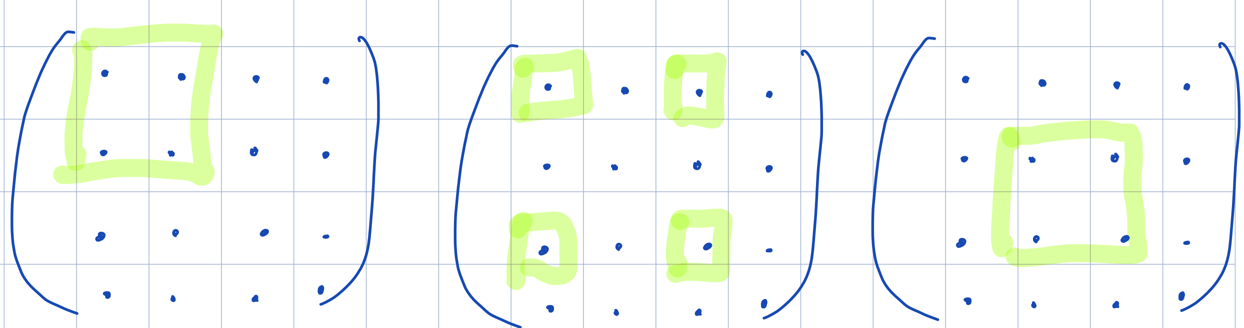
+ + − / + + − − $x^2+y^2-z^2-1=0$ $x^2+y^2=1+z^2$

iperb. iperb.

Fatto: se $d_2 \neq 0$ trovare i segni degli autoval. di Q/A è sempre facile:

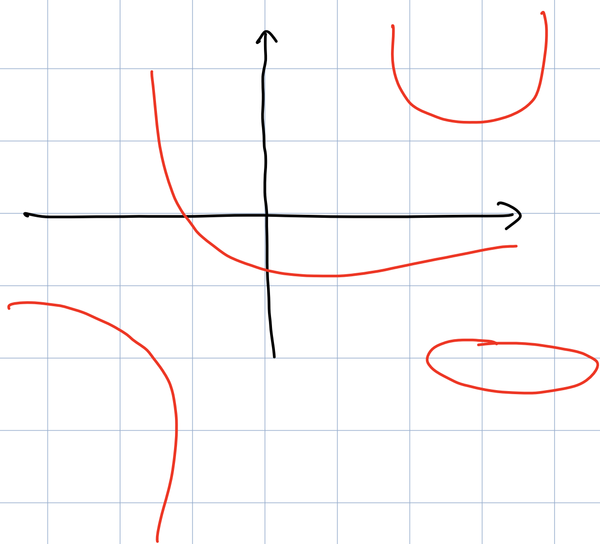
d_2	d_3	d_4	
$d_2>0 \to ++$	$+$	$+$	$+++/++++$
	$+$	$-$	$+++/+++-$
	$-$	$+$	$++-/+++-$
	$-$	$-$	$++-/++--$
	0	$\times$	$++0/+++-$
$d_2<0 \to +-$	$+$	$+$	$+--/++-- = ++-/++--$
	$+$	$-$	$+--/+--- = ++-/+++-$
	$-$	$+$	$\vdots$
	$-$	$-$	
	0	$\times$	$+-0/++--$

Se $d_2=0$ posso scegliere un altro d_2

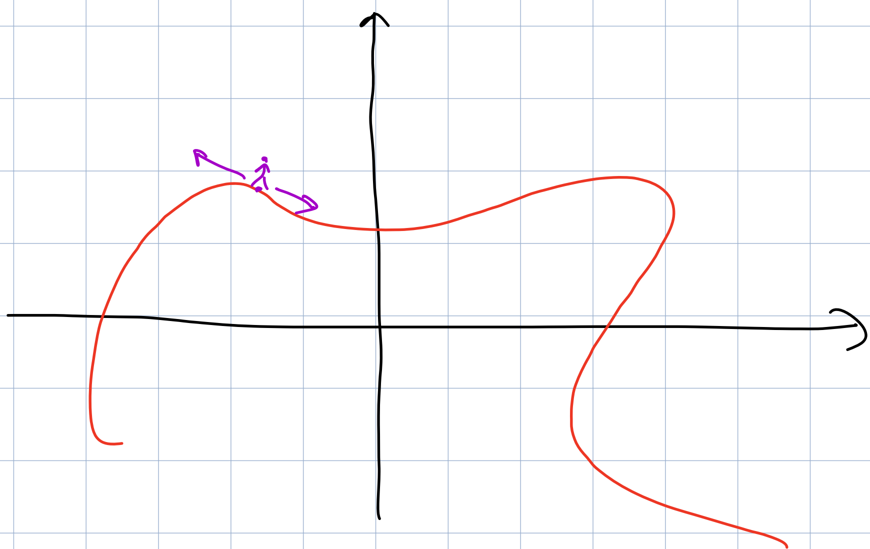


Tutti i d_2 sono nulli: solo caso molto particolare.

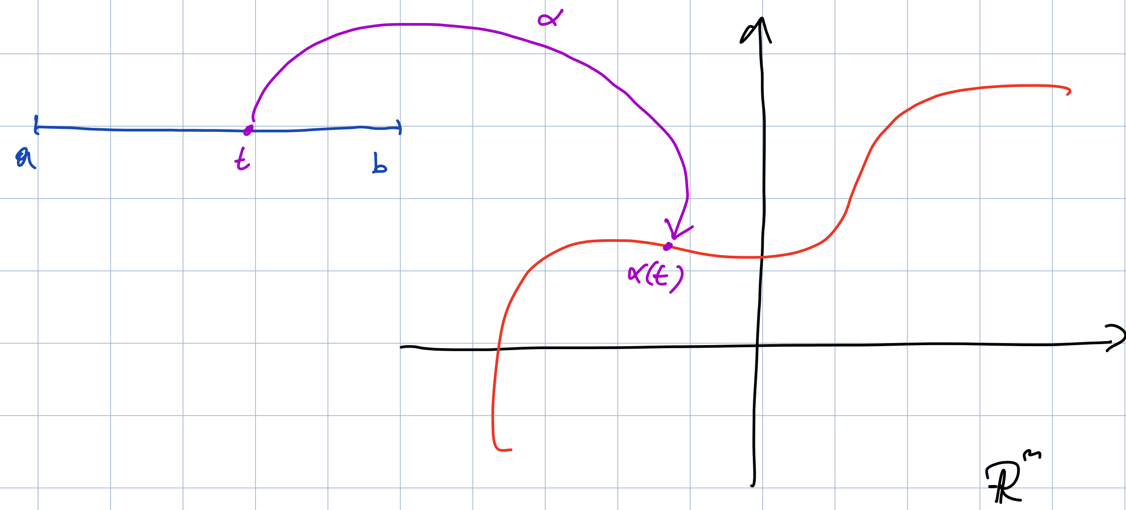
Curve



Oggetto "unidimensionale" in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) ma non dritto (retta)

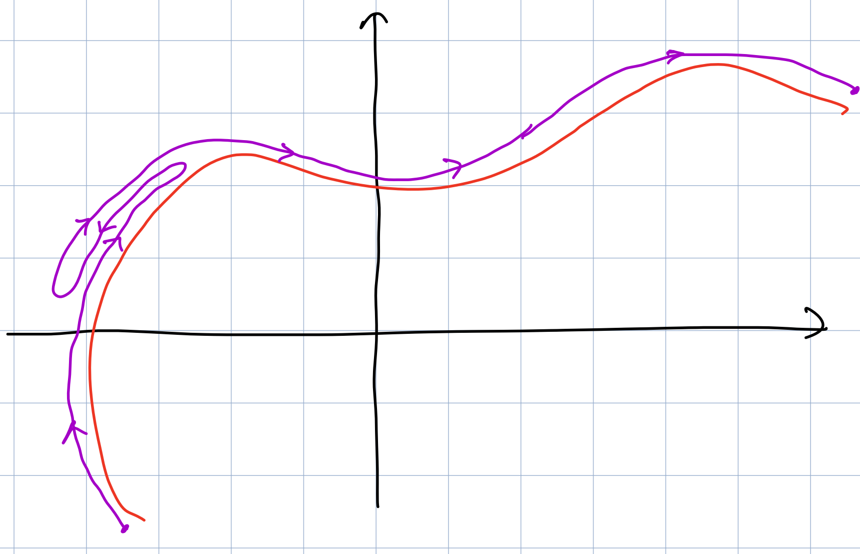


Def: chiamo curva parametrizzata una funzione $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ continua, dove $I \subset \mathbb{R}$ è intervallo (limitato o no / chiuso o no dx/sin)



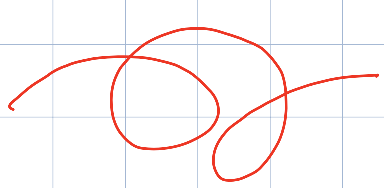
Chiamo supporto di α la sua immagine.

Att: non escluso:

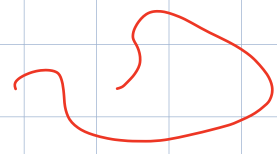


$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice

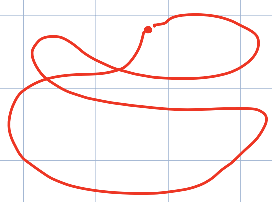
- semplice se è iniettiva
- chiusa se $\alpha(a) = \alpha(b)$
- semplice e chiusa se $\alpha|_{[a,b)}$ è iniettiva e $\alpha(a) = \alpha(b)$



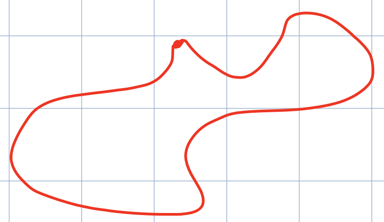
no semplice



semplice

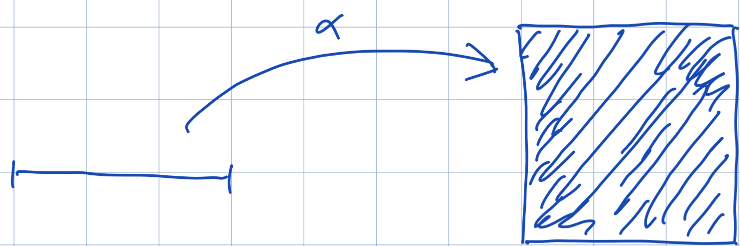


chiusa ma non semplice e chiusa

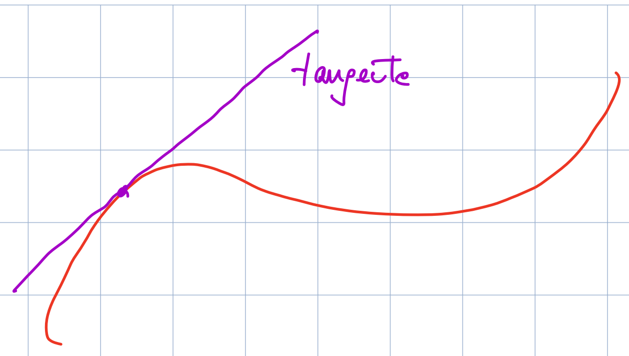


semplice e chiusa

<u>Fatto</u>: esistono funzioni continue $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con immagine $[0,1]\times[0,1]$.



Per recuperare l'idea che in ogni punto del supporto ci sono 1 direz. e 2 versi non basta continua.

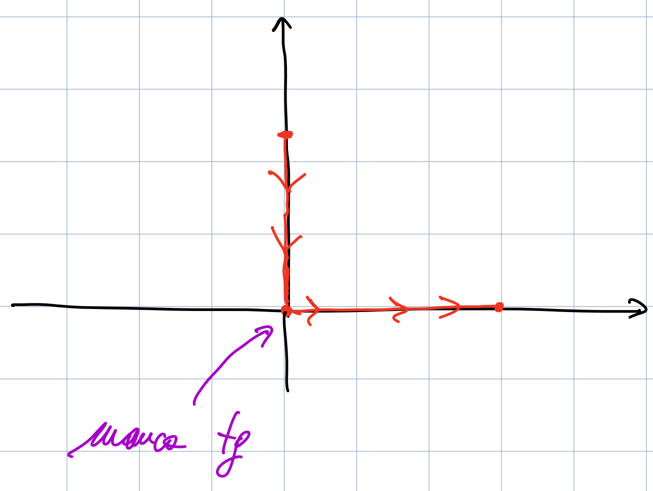


Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile il suo grafico ha retta tangente.

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

Es: $\alpha : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2}, 0\right) & t \in (0,1] \\ (0,0) & t = 0 \\ \left(0, e^{-1/t^2}\right) & t \in [-1,0) \end{cases}$$



e^{-1/t^2} ha tutte le derivate che tendono a 0 in $t \to 0^{\pm}$

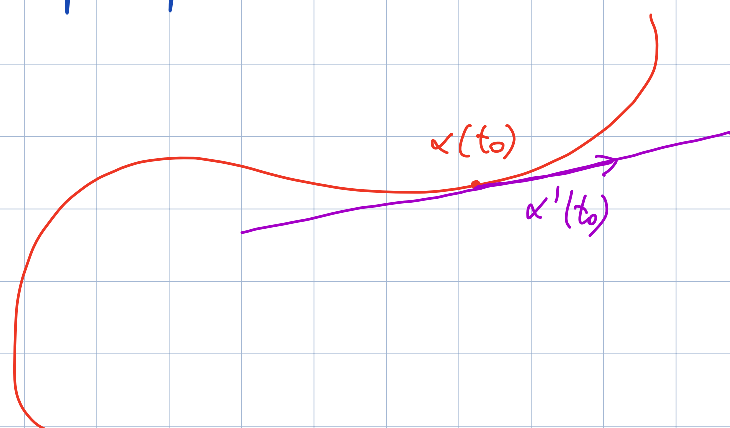
$\Rightarrow \alpha$ è C^∞

(in $t=0$ tutte le derivate sono $(0,0)$).

Def: chiamo α regolare se $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Prop: se α è regolare e $t_0 \in I$ la retta secante $\mathrm{Im}(\alpha)$ in $\alpha(t)$ e $\alpha(t_0)$ tende a una singola retta per $t \to t_0$ ⊛; tale retta ha "contatto duplice" con $\mathrm{Im}(\alpha)$ in $\alpha(t_0)$. La chiamo tangente

⊛ cioè alla retta che passa per $\alpha(t_0)$ e ha giacitura $\alpha'(t_0)$



Dimo: retta che passa per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ è

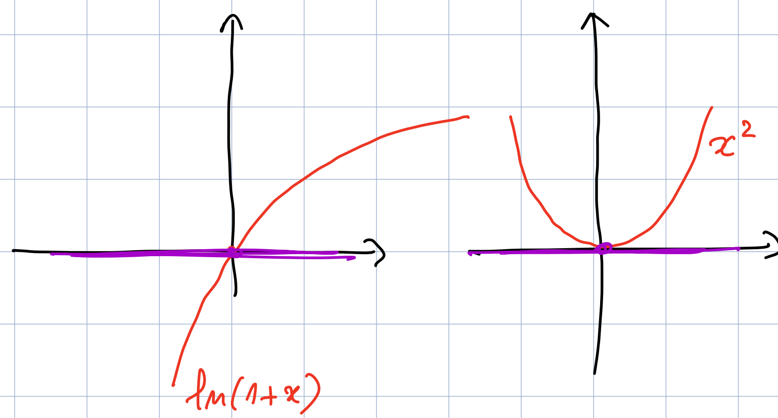
$$\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \alpha(t_0) + \mathrm{Span}\left(\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}\right) \xrightarrow{t \to t_0} \alpha'(t_0) \neq 0$$

Contatto tra retta ℓ e $\mathrm{Im}(\alpha)$:

$$d(t) = \mathrm{dist}(\alpha(t), \ell)$$

contatto tra $\mathrm{Im}(\alpha)$ e ℓ singolo: $\quad d(t_0) = 0$

" " " " " doppio : $d'(t_0) = 0$



$$\ell : \ ax+by+c=0 \qquad a^2+b^2=1$$

$$d(\alpha(t),\ell) = |a\cdot X(t)+b\cdot Y(t)+c| = d(t)$$

$d(t_0)=0$ scelgo $c = -a\cdot X(t_0) - b\cdot Y(t_0)$

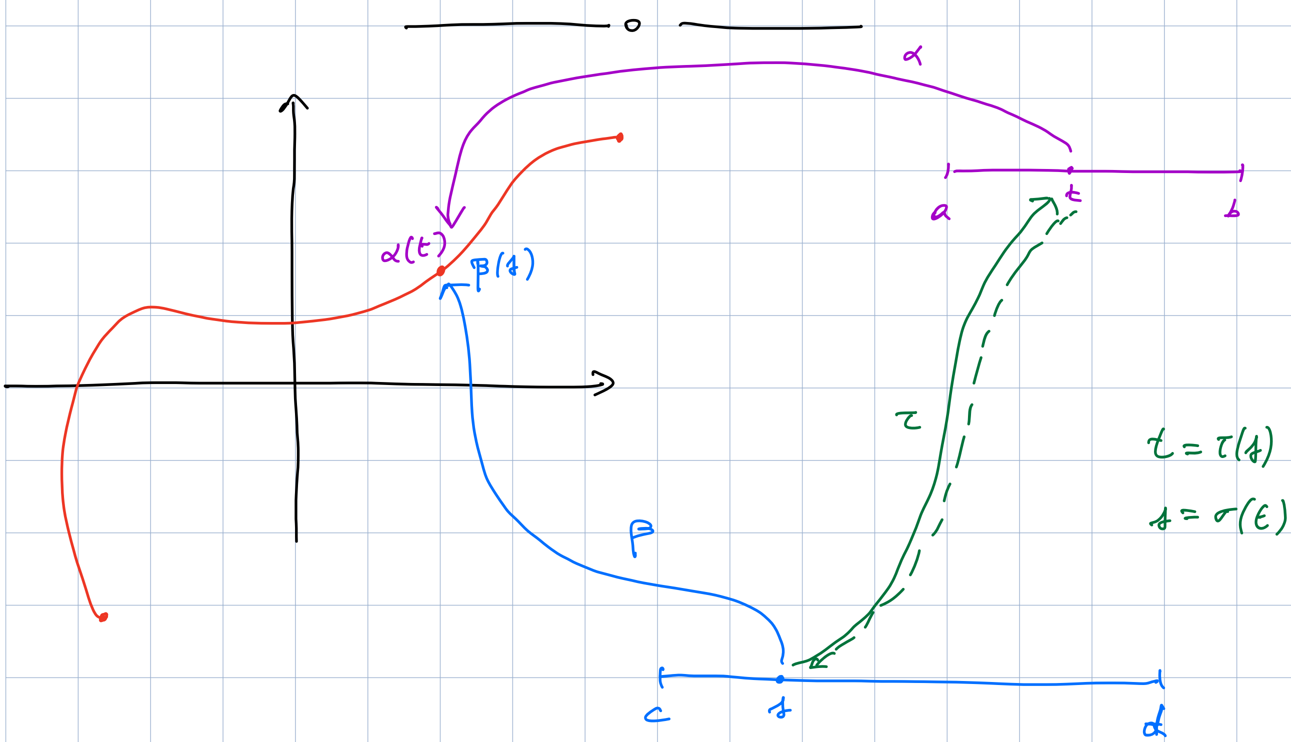
$$d(t) = \sqrt{(a\cdot X(t)+b\cdot Y(t)+c)^2}$$

$$d'(t) = \cancel{\frac{1}{2}}\ \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\dots}}_{|aX+bY+c|}}\cdot \cancel{2}(aX+bY+c)}_{\pm 1}\cdot(aX'+bY')$$

$$d'(t_0)=0 \iff a\cdot X'(t_0)+b\cdot Y'(t_0)=0$$

cioè $\iff$ $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \alpha'(t_0)$ soddisfa l'equazione $ax+by=0$ che è la giacitura di ℓ.

Rmk: la giacitura di ℓ è proprio $\alpha'(t_0)$. $\blacksquare$



Dico che $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è ottenuta da $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ per cambio di parametro se esiste $\tau : [c,d] \to [a,b]$ derivabile bigettiva t.c. $\beta(s) = \alpha(\tau(s))$

(oppure : $\sigma = \tau^{-1}$ $\qquad \alpha(t) = \beta(\sigma(t))$).