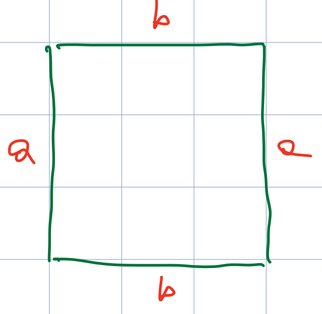
Geometria 27/4/22

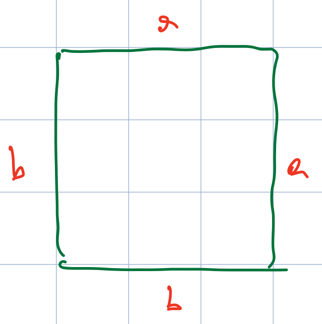
Compilare questionario sul corso

Domani ...

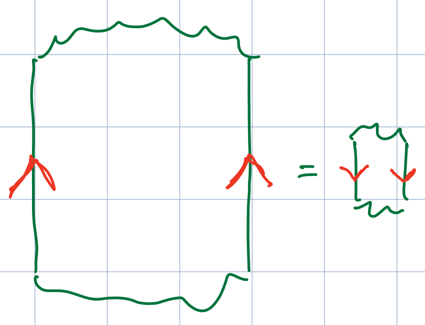
Ese: quali sup. si ottengono incollando a coppie i lati di un quadrato?



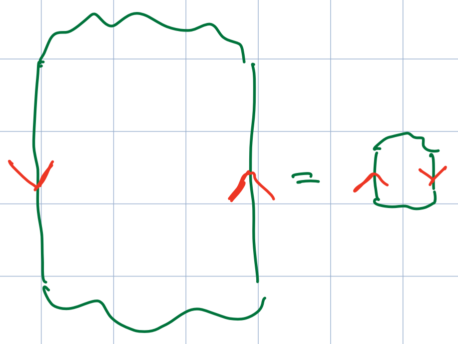
opposti



consecutivi



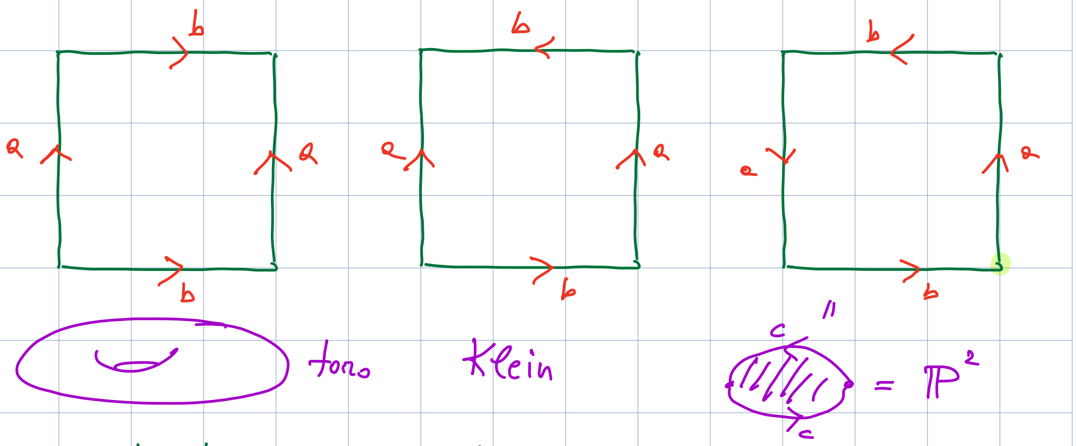
discordi



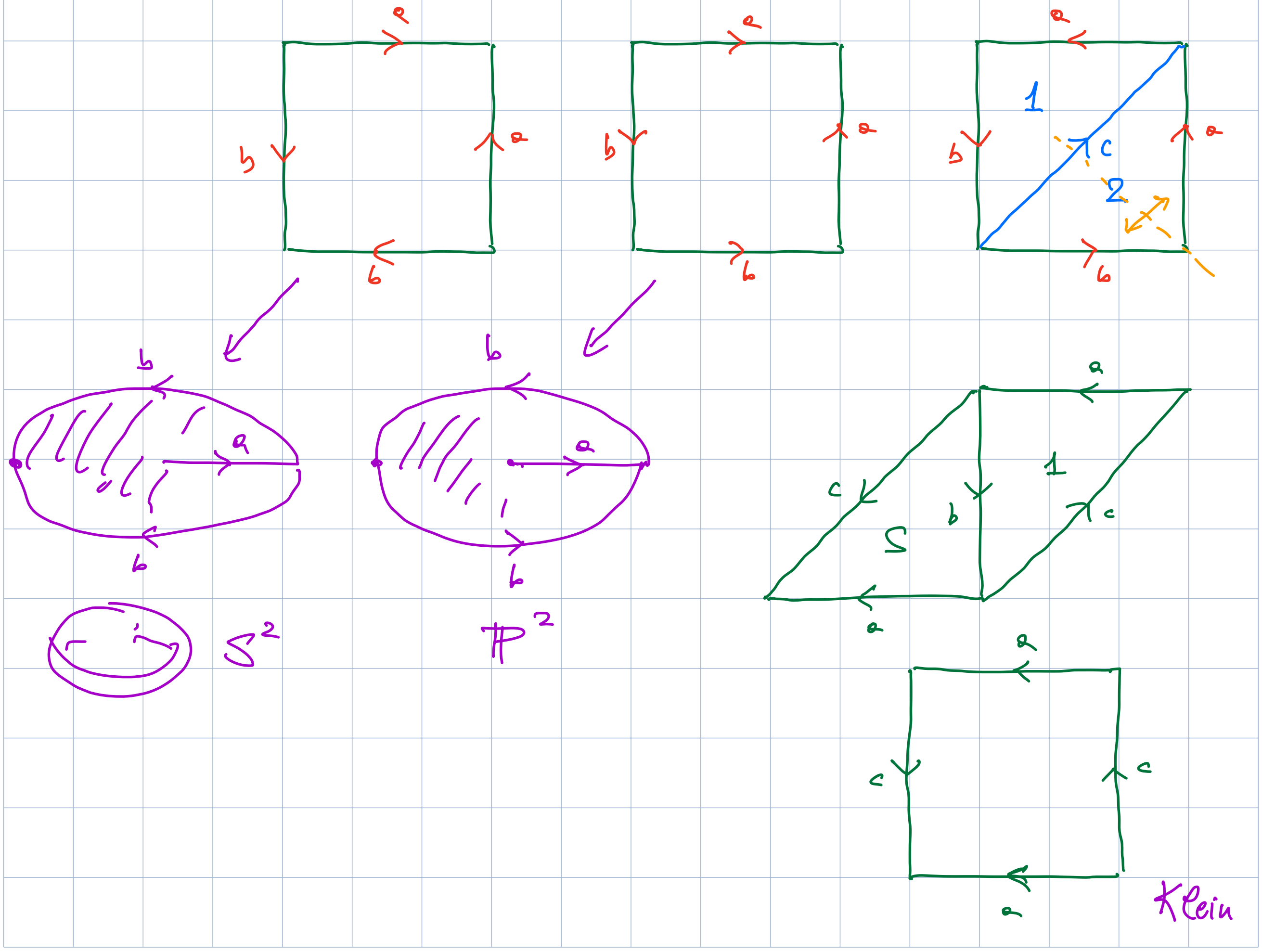
concordi

In tutto 6 possib:

opposti : disc/disc disc/conc conc/conc



concordi : disc/disc disc/conc conc/conc



Un stsp. proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di dim $= 1$ si chiama <u>retta</u>.

Prop: due rette distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno sempre esattamente un punto in comune.

Dim: $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

ℓ_j = proiez. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $W_j \setminus \{0\}$, $W_j \subset \mathbb{R}^3$, dim$=2$

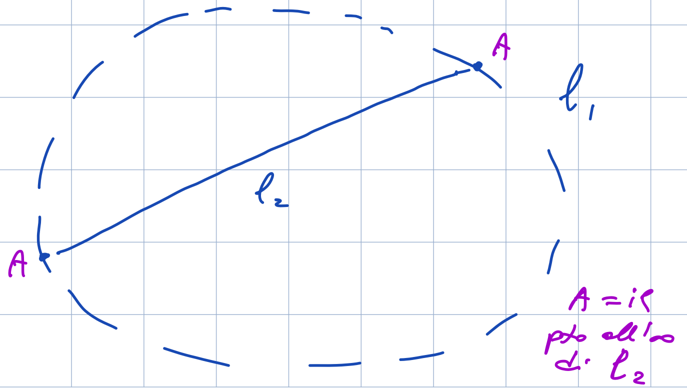
$\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = R$ dim $R = 1$

$\ell_1 \cap \ell_2$ = proiez. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $R \setminus \{0\} \Rightarrow$ è un punto. $\blacksquare$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underset{\substack{\parallel \\ \text{retta all'}\infty}}{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$$

Casi per $\ell_1 \neq \ell_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

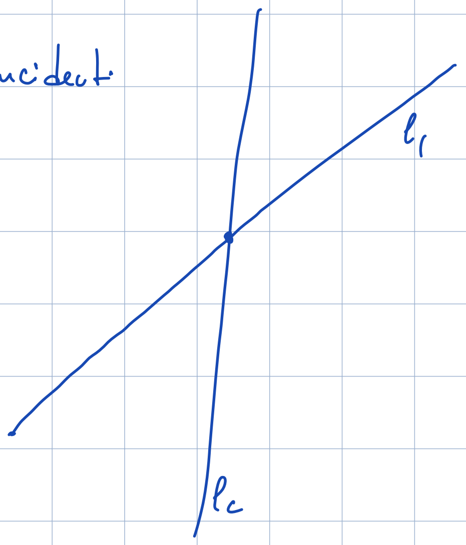
- ℓ_1 = retta all'∞, $\ell_2 \cap \mathbb{R}^2$ = retta affine



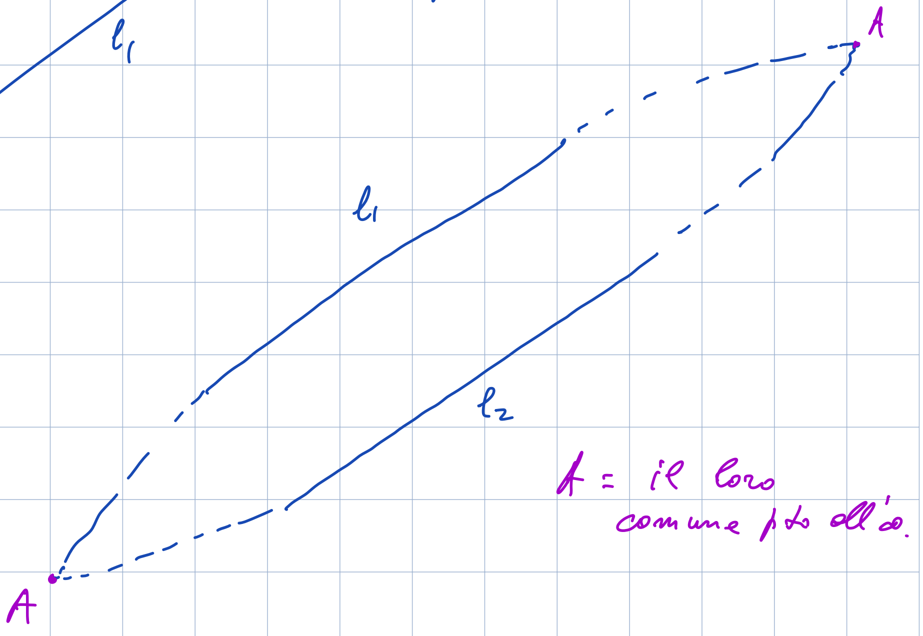
A = il pto all'∞ di ℓ_2

• l_1, l_2 no retta all'∞, $l_1 \cap \mathbb{R}^2$, $l_2 \cap \mathbb{R}^2$ = rette affini

* incidenti



* parallele



A = il loro comune pto all'∞.

* * *

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \underset{\text{affine}}{\mathbb{R}^n} \cup \underset{\text{pti all'}\infty\text{ di } \mathbb{R}^n}{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

Cambi di coord. naturali su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ottenuti da quelli di $\mathbb{R}^{n+1}$, cioè date $M \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$, $\det(M) \neq 0$, $[x] \longmapsto [M \cdot x]$.

Q: quali cambi di coord. proiettivi preservano la parte $\underbrace{\text{affine}}_{\text{al finito}}$?

$$\mathbb{R}^n = \text{proiez. di } \mathbb{R}^n \times \{1\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}^n, \ c \neq 0 \right\}$$

Voglio che $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}$ $\quad d \neq 0 \quad \forall x, \forall c \neq 0$

$$M = \left(\begin{matrix} B & v \\ {}^t w & a \end{matrix} \right) \begin{matrix} \}n \\ \}1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \underbrace{}_{n} & \underbrace{}_{1} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t w & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot x + v \\ {}^t w \cdot x + ac \end{pmatrix}$$

voglio ${}^t w \cdot x + a \cdot c \neq 0 \quad \forall x, \forall c \neq 0$;

se avessi $w \neq 0$ scegliendo $c = 1$

$$x = -a \cdot \frac{w}{\|w\|^2}$$

$$-a \, {}^t w \cdot \frac{w}{\|w\|^2} + a = 0 \ ; \ \text{perciò } w = 0$$

resta $a \cdot c \neq 0 \quad \forall c \neq 0 \implies a \neq 0$

$$M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad a \neq 0 \qquad \frac{1}{a} \cdot M = \begin{pmatrix} B' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definisco lo stesso cambio di coord. proiettivo

Dunque $\left[\begin{pmatrix} B' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} B' \cdot x + v' \\ 1 \end{bmatrix}$

Scoperto: i cambi di coord. proiettivi che preservano parte affine sono quelli affini (lineari + traslazione).

Ricordo: •) equaz. omog. di grado 2 su $\mathbb{R}^{n+1}$ si scrive come

$$^t x \cdot A \cdot x = 0 \qquad A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}) \ \underline{\text{simm}}$$

•) equaz. di grado 2 su $\mathbb{R}^n$ si scrive come

$$^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$$

Dato $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ di equazione $^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ posso associargli $\overline{\mathcal{L}}$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di equazione $\left[\,^t x \cdot A \cdot x\right] = 0$.

Lo chiamo completamento proiettivo; la sua parte all'∞ è $\overline{\mathcal{L}} \cap \{x_{n+1} = 0\}$.

Es: $\mathcal{L}$: $7x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + 9y - 11 = 0 \quad \subset \mathbb{R}^2$

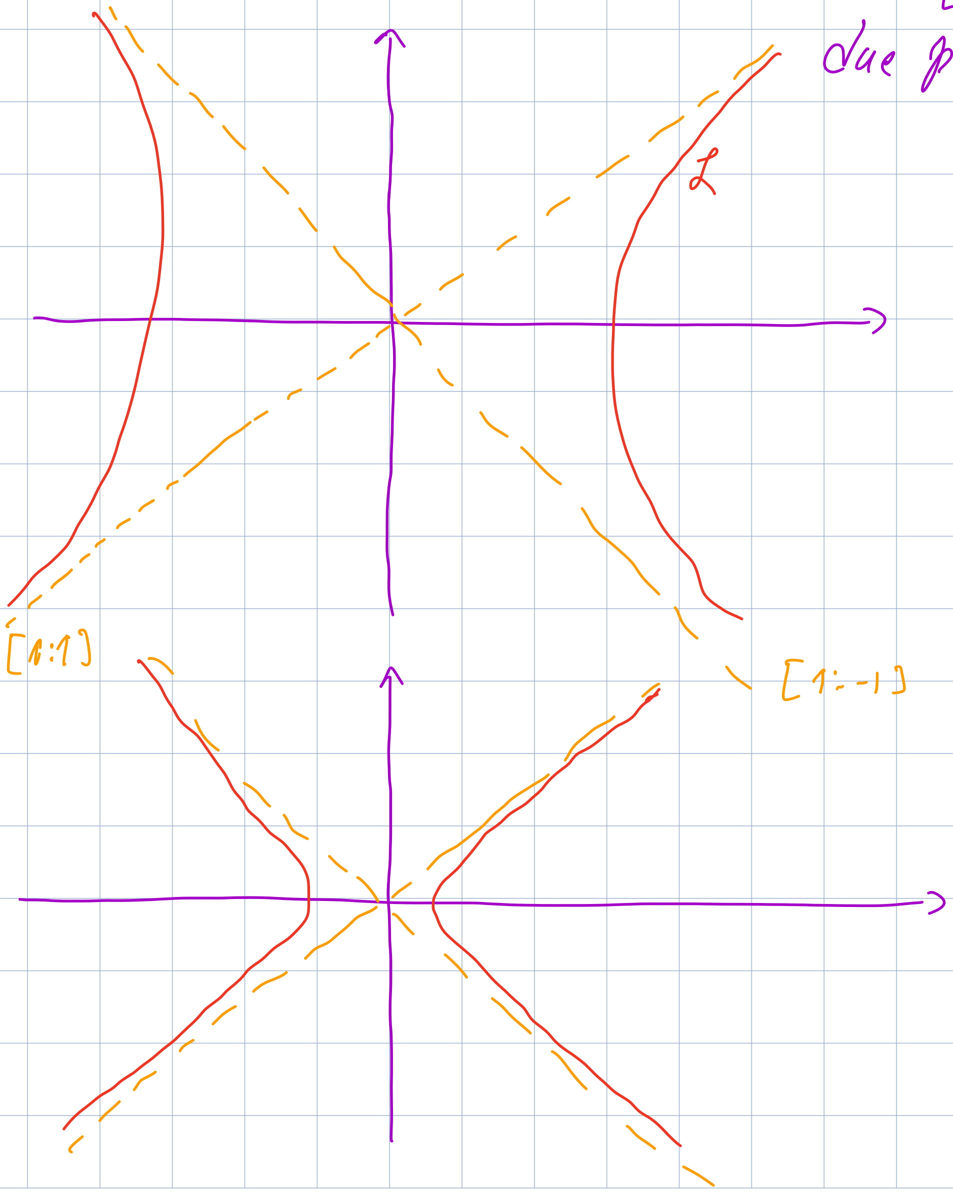
$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5/2 & -2 \\ 5/2 & 2 & 9/2 \\ \hline -2 & 9/2 & -11 \end{array}\right)$$

$\overline{\mathcal{L}}$: $7x^2 + 5xy + 2y^2 - 4xz - 9yz - 11z^2 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

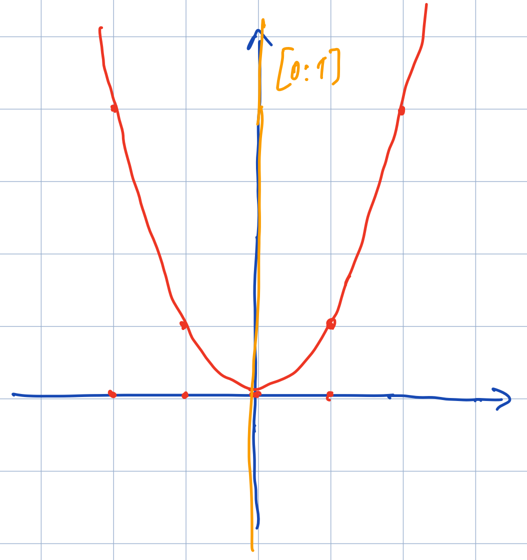
$\mathcal{L}_\infty$: $7x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

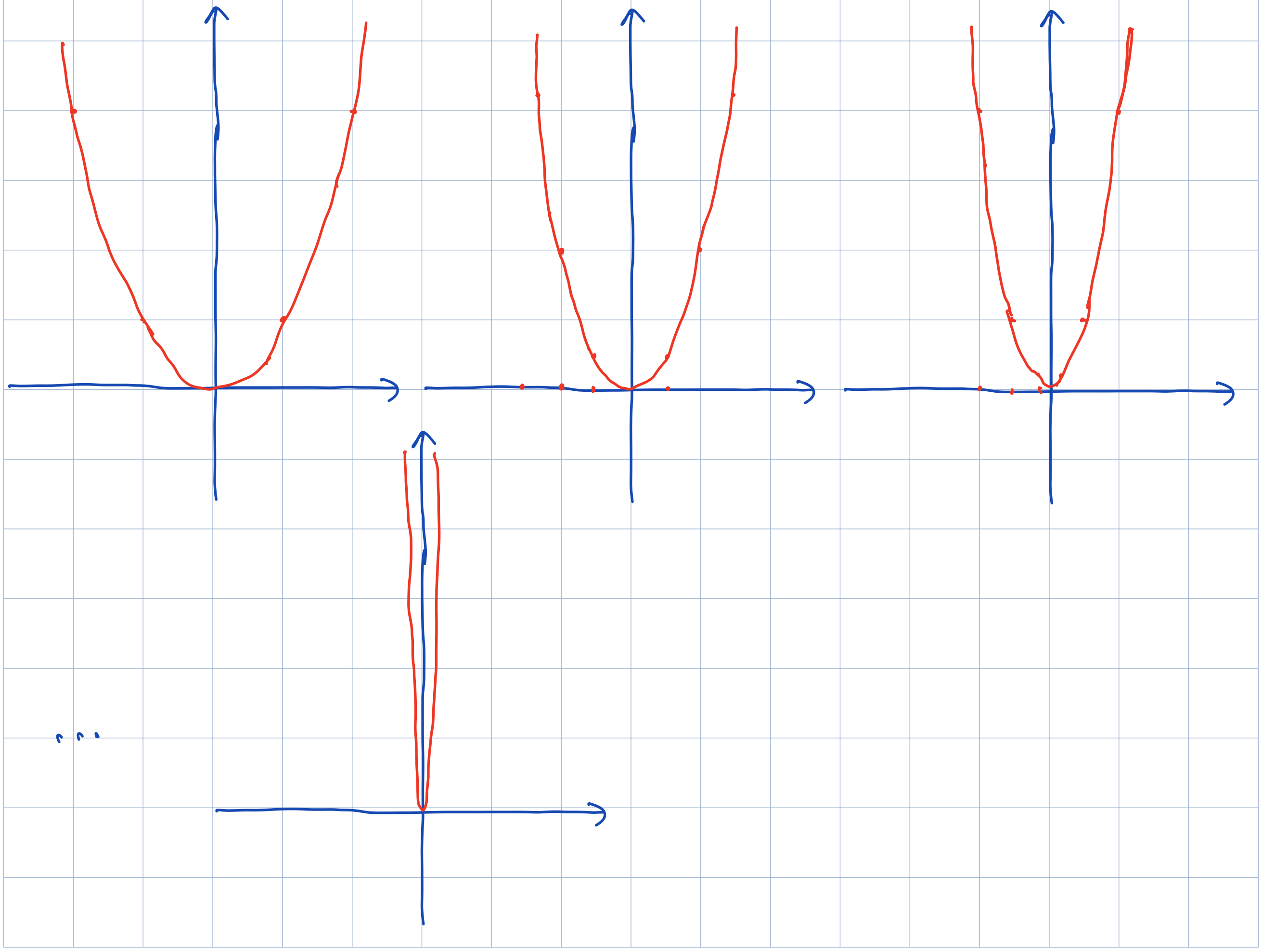
Coniche modello:

	$\mathcal{L}$	$\overline{\mathcal{L}}$		$\mathcal{L}_\infty$	
∅	$x^2+y^2+1=0$	$x^2+y^2+z^2=0$	∅	∅	
circonf.	$x^2+y^2=1$	$x^2+y^2=z^2$	...	$x^2+y^2=0$	∅
iperb.	$x^2-y^2=1$	$x^2-y^2=z^2$	...	$x^2-y^2=0$	[1:1] [1:-1] due punti



	$\mathcal{L}$	$\overline{\mathcal{L}}$		$\mathcal{L}_\infty$	
parab.	$y = x^2$	$yz = x^2$	...	$x^2 = 0$	$[0:1]$ un punto





Domani: nel pomeriggio scrivo cosa succede sulle chat.

Prop: un luogo in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definito da equaz. II grado omogenea $^t x \cdot A \cdot x = 0$ con $\det(A) \neq 0$ a meno di trasf. proiettive è

$$\{ [x] : x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 \}$$

con $p \geq n/2$.

Esempi:

$n = 1$ $\quad x^2 + y^2 = 0 \quad \emptyset$

$\quad x^2 = y^2 \quad$ due punti

$n = 2$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \emptyset$

$\quad x^2 + y^2 = z^2 \quad$ l'unica conica proiettiva non dep. non vuota

$n = 3$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \quad \emptyset$

$\quad x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \quad$ ellissoide proiettivo

$\quad x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \quad$ iperboloide proiettivo

Dim: $\quad [x] \longmapsto [M \cdot x]$

$$^t x \cdot A \cdot x = 0 \qquad\qquad ^t x \cdot \underbrace{^t M \cdot A \cdot M}_{} \cdot x = 0$$

Usando il teorema spettrale prendo M ortog. che diagonalizza A

e mi riconduco $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$

sostituendo x_j con $\frac{x_j}{\sqrt{|\lambda_j|}}$ mi riconduco a

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_{n+1}^2 = 0$$

porto i negativi al II membro e se serve scambio. ▨

Chi è $\mathcal{L}_\infty$ per le $\mathcal{L}$ coniche modello?
(o ∅ o l'unico altro non deg)

$x^2+y^2+1=0 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=0$ ∅

$x^2+y^2=1 \longrightarrow x^2+y^2=z^2$ non-∅

$x-y^2=1 \longrightarrow x^2-y^2=z^2$ $y^2+z^2=x^2$ non-∅

$y=x^2 \longrightarrow yz=x^2$ $\begin{cases} y = u+w \\ z = u-w \\ x = x \end{cases}$ $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(y+z) \\ w = \frac{1}{2}(y-z) \\ x = x \end{cases}$

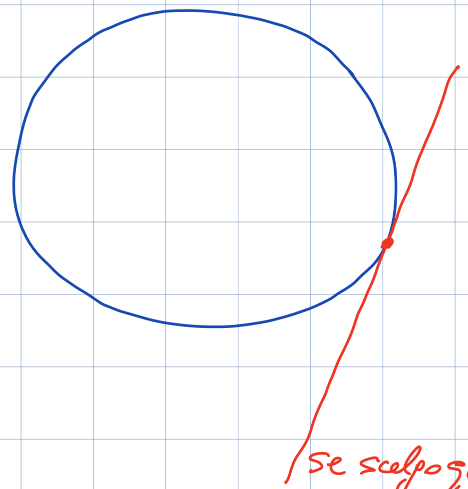
$u^2-w^2=x^2$ $x^2+w^2=u^2$ non-∅

Cioè: tutte e tre le coniche non-∅ hanno la stessa conica proiettiva non-∅ come completamento.

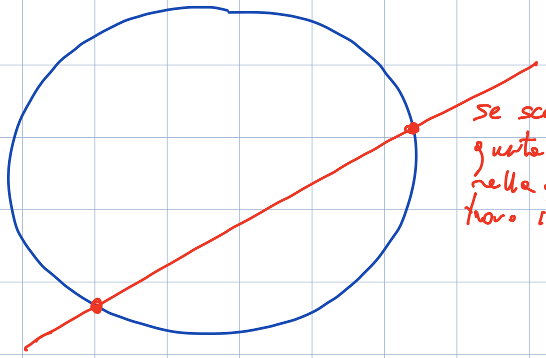
$$x^2+y^2=z^2$$

$z = 1$: scelgo retta all'∞ $z=0$

$x^2+y^2=1$ circonferenza



se scelgo questa come retta all'∞ trovo parabola



se scelgo questa come retta all'∞ trovo iperbole

Teo: il luogo di equaz. ${}^t\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$, $\underbrace{\det(A)}_{d_3}\neq 0$

a meno di cambi di coord. affini è:

(1) se $d_2>0$, $d_1\cdot d_3>0$ $\emptyset$ $x^2+y^2+1=0$

(2) se $d_2>0$, $d_1\cdot d_3<0$ circonf $x^2+y^2=1$

(3) se $d_2=0$ parab. $y=x^2$

(4) se $d_2<0$ iperb. $x^2-y^2=1$.

Dimo: • 4 casi (1) (2) (3) (4) coprono tutti i possibili e sono mutuamente esclusivi.

Non compreso: $d_2>0$, $d_1=0$ $\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$

$d_1=0 \Rightarrow d_2=-a_{12}^2\leq 0$: impossibile.

- Operazioni lecite su $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$

→ sostituire A con ${}^tM \cdot A \cdot M$, $M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ sostituire A con $k \cdot A$ $\quad k \neq 0$

- I casi (1) (2) (3) (4) sono preservati dalle operazioni lecite: infatti agendo con $\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = {}^t\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} QB & Qv + \ell \\ {}^t\ell B & {}^t\ell v + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tB \cdot Q \cdot B & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$d_2' = \det({}^tB \cdot Q \cdot B) = \det({}^tB) \cdot \det(Q) \cdot \det(B)$$

$$= \det(B)^2 \cdot \det(Q)$$

$$= (>0) \cdot d_2$$ concorde con d_2.

$\Longrightarrow$ (3) e (4) preservati; (1) e (2) domani

Agendo con k $\qquad A' = k \cdot A$.

$Q' = k \cdot Q \qquad d_2' = k^2 \cdot d_2$ concorde

$d_1' = k \cdot d_1$, $d_3' = k^3 \cdot d_3$ $\Longrightarrow d_1' \cdot d_3' = k^4 (d_1 \cdot d_3)$ concorde.

Strategia: mostrare che tramite le trasf. lecite posso ricondurmi alle equaz. canoniche

$$x^2+y^2+1=0, \quad x^2+y^2=1, \quad y=x^2, \quad x^2-y^2=1$$

e ho finito perché in effetti le 4 equazioni cadono nei 4 casi:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

d_1	+	+	+	+
d_2	+	+	0	−
d_3	+	−	$\neq 0$	$\neq 0$
$d_1 \cdot d_3$	+	−		