Geometria 7/4/22

10.2.4 (c)

$$A = \begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & (7-7i)(1-i) + (1+i)(7+7i) \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & (7+7i)(1+i) + (1-i)(7-7i) \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Normale! $\exists\ v_1, v_2$ ortonormale di $\mathbb{C}^2$ t.c.
$A v_j = \lambda_j v_j$

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 14(1-i)$$
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 49(1-2i-1) - (1+2i-1) = -100i$$

$$p_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot t + \det(A)$$

$$\Delta/4 = 49(1-2i-1) + 100i = 2i = (1+i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = (7-7i) \pm (1+i) = \begin{cases} 8-6i \\ 6-8i \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (8-6i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (7-7i)x + (1+i)y = (8-6i)x \\ \dots \end{cases}$$

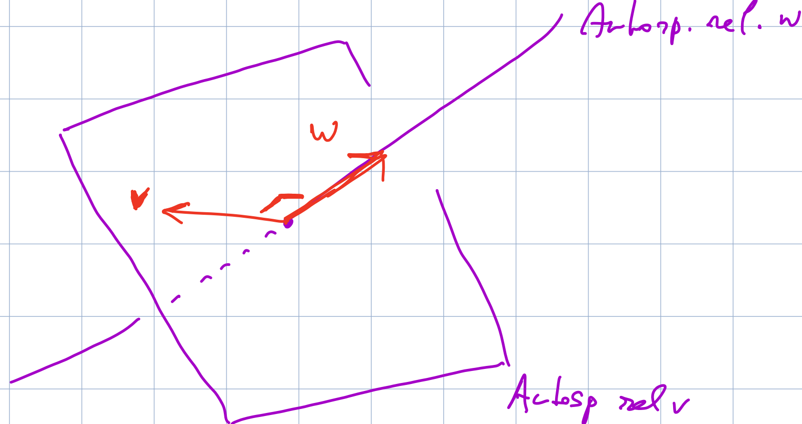
$\cancel{(1+i)}y = \cancel{(1+i)}x$ $\qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$v_2: \begin{cases}(7-7i)x + (1+i)y = (6-8i)x\\ \dots\end{cases}$

$\cancel{(1+i)}y = -\cancel{(1+i)}x$ $\qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ base ortonormale.

<u>Oss</u>: se ho A normale ($\Rightarrow$ si applica teo spettrale) e ho autoval. λ, μ distinti con autovettori v, w allora $v \perp w$



10.2.5 Verificare che A è unitaria.

(b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\sqrt{2} & -i\\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ i & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$

Unitaria: $A^* \cdot A = I_3$ ovvero

se $A = (u_1, u_2, u_3)$ ho $\|u_j\| = 1$, $\langle u_j | u_k \rangle = 0$ $j \neq k$ $(j<k)$

$$\|u_1\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{1}{4}(2+0+2) = 1$$

$$\|u_3\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle u_1 | u_2 \rangle_{\mathbb{C}^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot(i\sqrt{2}) + (-i\sqrt{2})\cdot 0 + i\cdot(-\sqrt{2})\right) = 0$$

$$\left[= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1\cdot(-i\sqrt{2}) + (+i\sqrt{2})\cdot 0 + (-i)\cdot(-\sqrt{2})\right) = 0\right]$$

$$\langle u_1 | u_3 \rangle = \frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot i - i\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + i\cdot 1\right) = 0$$

$$\langle u_2 | u_3 \rangle = \frac{1}{4}\left((-i\sqrt{2})\cdot i + 0\cdot\sqrt{2} + (-\sqrt{2})\cdot 1\right) = 0.$$

Fatto: $\exists\, w_1, w_2, w_3$ base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ t.c.

$A\cdot w_j = e^{i\alpha_j}\cdot w_j$ (difficile trovarli)

10.2.6 Trovare segni autoval. di A.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$

Fatto: se A è hermitiana i segni degli autoval di A coincidono con quelli di $d_1, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1}$ (se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$).

$d_1 = 2 > 0$

$d_2 = -1 < 0$

$d_3 = 0 \cancel{-i} + 1 \cancel{+i} + 1 + 0 - 2 - 4 < 0$

$\Rightarrow$ segni autoval di A: $+, -, +$ $\quad (+ + -)$

X insieme, $\sim$ relaz. di equiv. su X

- $x \sim x \quad \forall x$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

$[x] = \{ y : x \sim y \}$ classe di equivalenza

Fatto: le classi di equiv. sono partizione

Chiamo insieme quoziente di X rispetto a $\sim$

$X/_\sim$ = l'insieme delle classi di equivalenza

Passare da X a $X/_\sim$ significa identificare tra loro gli elementi di X in relazione $\sim$ tra loro.

Q: come descrivere un quoziente?

Es: X = noi $\qquad \sim$: risiedono stesso comune.

$X/_\sim = \{ \{\text{Carlo}\}, \{\text{Thomas, Sali, Matteo}\}, \{\text{Alessia}\}, \dots \}$

Posso descriverlo dando nome a ciascun elemento:

$X/_\sim \leftrightarrow \{ \text{Parma, Montopoli, Massa}, \dots \}$

Def: chiamo insieme di rappresentanti per $\sim$ la scelta $\mathcal{R}$ di un elemento in ogni classe di equiv.

Oss: $X/_\sim \longleftrightarrow \mathcal{R}$

Es: X = noi $\quad \sim$ = stessa residenza

$X/_\sim \leftrightarrow \{ \text{Carlo, Matteo, Alessia}, \dots \}$

Es: X = calciatori serie A

$\sim$ = militano stessa squadra

$\mathcal{R} = \{$ i capitani delle squadre $\}$

$X/_\sim \longleftrightarrow \mathcal{R}$.

Es: $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

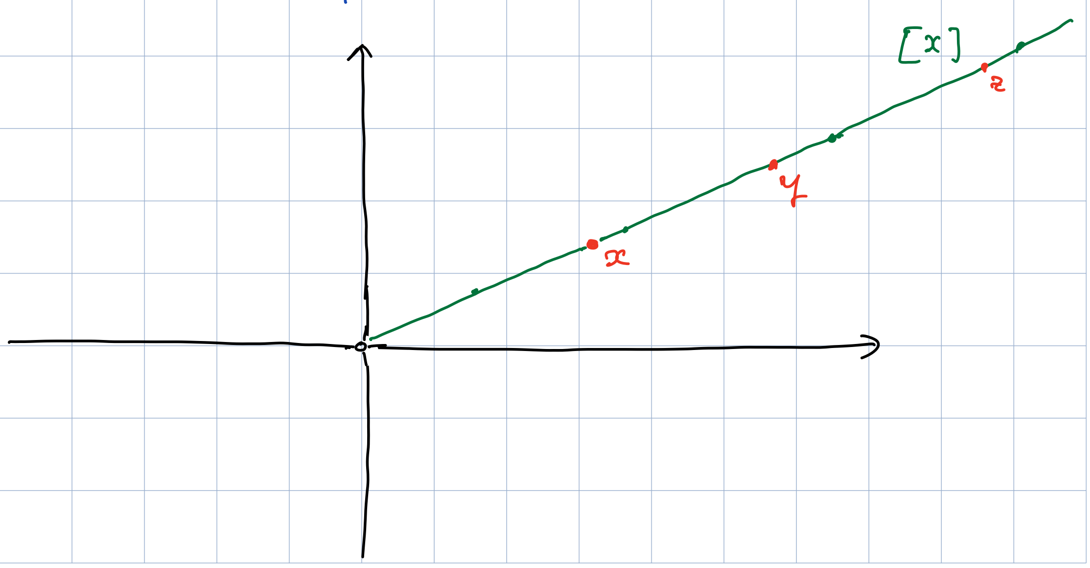
$\sim$: $x \sim y$ se $y = \alpha \cdot x$ $\alpha > 0$.

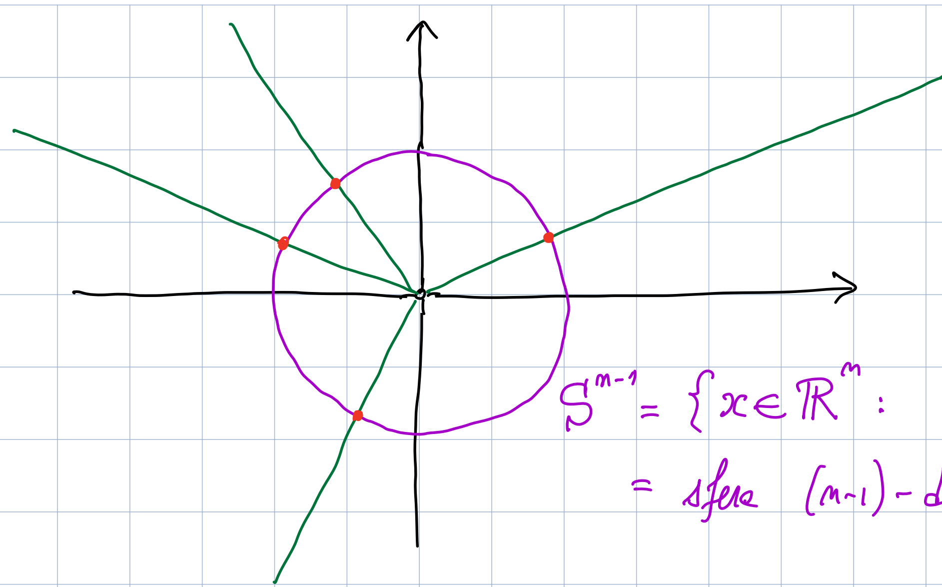
- $x \sim x$ poiché $x = 1 \cdot x$ $1 > 0$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ poiché

$$y = \alpha \cdot x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\alpha} \cdot y$$
$$\alpha > 0 \qquad\qquad \frac{1}{\alpha} > 0$$

- $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ poiché

$$y = \alpha \cdot x, \quad z = \beta \cdot y \quad \Longrightarrow \quad z = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$
$$\alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad\qquad \alpha \cdot \beta > 0.$$





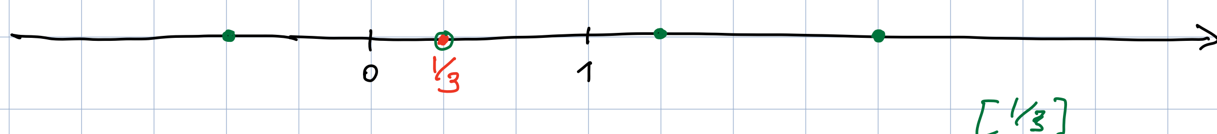
$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$

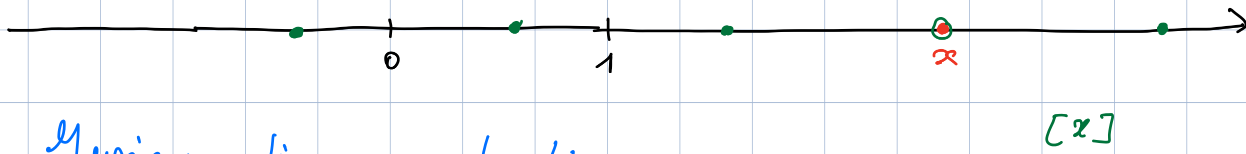
$=$ sfera $(n-1)$-dimensionale

<u>Oss</u>: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Big/ \begin{smallmatrix} y \sim x \\ \text{se } y = \alpha \cdot x \\ \alpha > 0 \end{smallmatrix} \longleftrightarrow S^{n-1}$

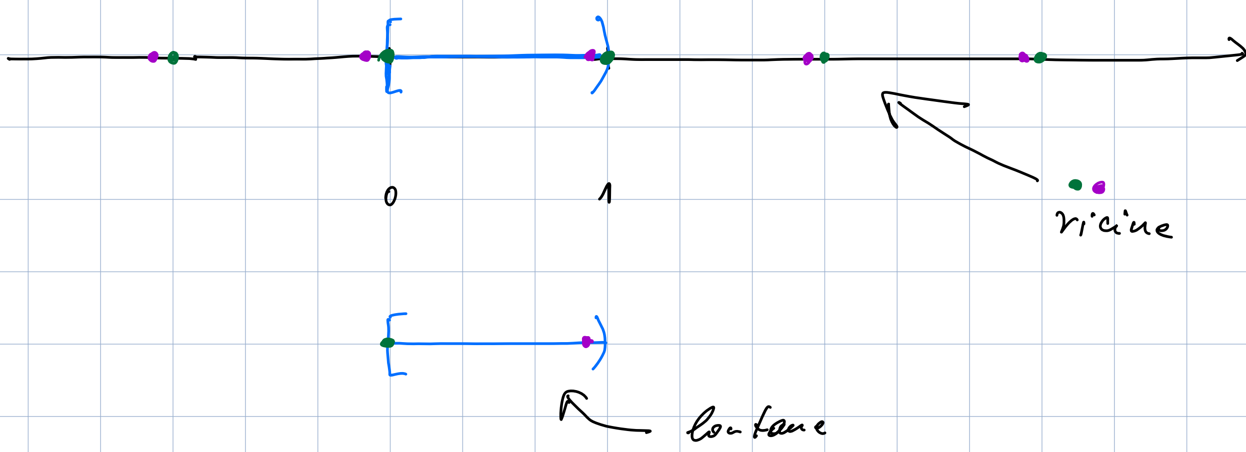
<u>Esempio</u>: $X = \mathbb{R}$ $\quad x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$

- $x \sim x$ poiché $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ poiché se $y - x = n \in \mathbb{Z}$
  allora $x - y = -n \in \mathbb{Z}$
- $x \sim y$ e $y \sim z$ allora $x \sim z$ poiché
  $y - x = n \in \mathbb{Z}$ $\quad z - y = m \in \mathbb{Z}$
  allora $z - x = (z - y) + (y - x) = m + n \in \mathbb{Z}$





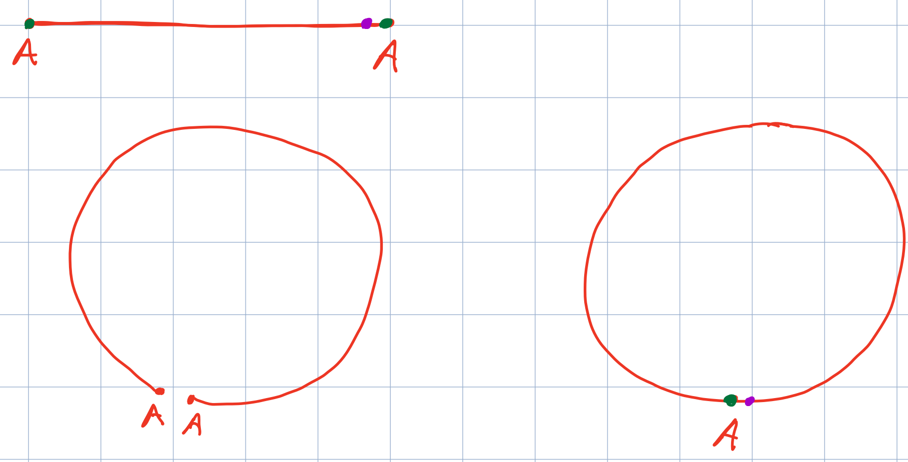
Insieme di rappresentanti: $[0,1)$.



Alternative: invece che $[0,1)$ prendo $[0,1]$ = insieme di rappresentanti sovrabbondante

ogni classe ha un solo rappresentante in $[0,1]$ tranne la classe $\mathbb{Z}$ che ha 0 e 1.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{R}\Big/_{\substack{x\sim y \\ \Updownarrow \\ y-x\in\mathbb{Z}}} \quad \longleftrightarrow \quad [0,1]\Big/_{0=1} \quad \longleftrightarrow \quad S^1$$



Def: se V è spazio vett. su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ chiamo spazio proiettivo associato a V il quoziente

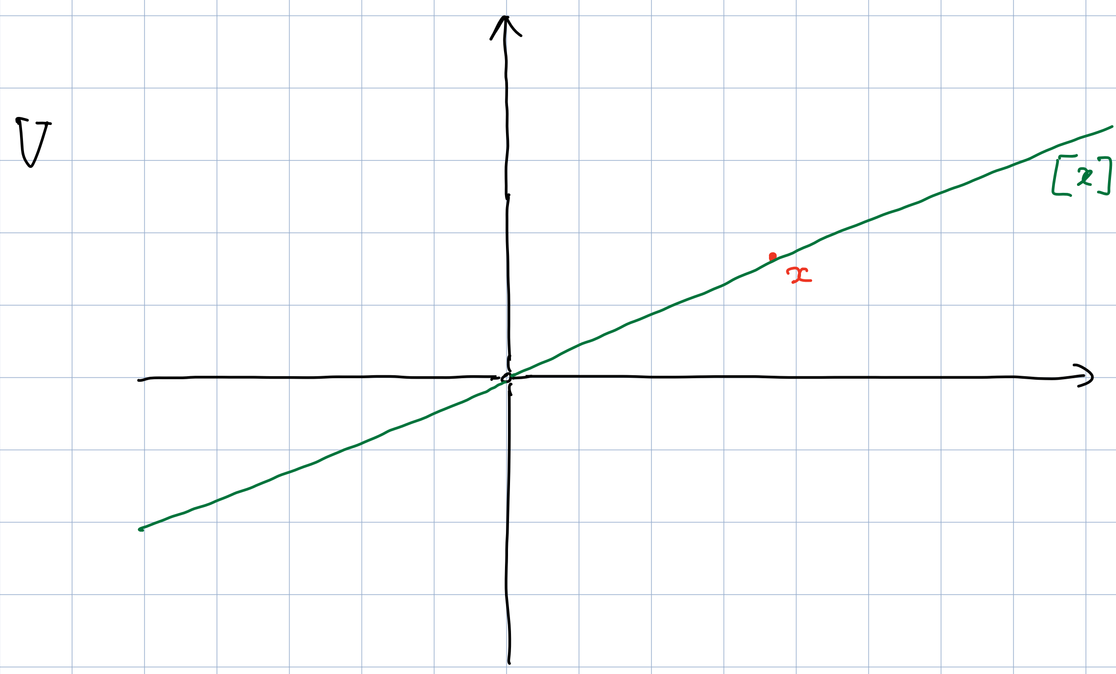
$$\mathbb{P}(V) = \left(V \setminus \{0\}\right) \Big/ {\scriptstyle x \sim y \,\Leftrightarrow\, \exists\, y = \alpha \cdot x,\ \alpha \in \mathbb{K}} .$$

Oss: tale α è automaticamente $\neq 0$ poiché $y \neq 0$.

Equiv:
- $x \sim x$ poiché $x = 1 \cdot x$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ poiché $y = \alpha \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \cdot y$
- $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ poiché

  $y = \alpha \cdot x,\ z = \beta \cdot y \Rightarrow z = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$

Se $V = \mathbb{R}^{n+1}$ chiamo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ spazio proiettivo reale n-dim. denotato $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

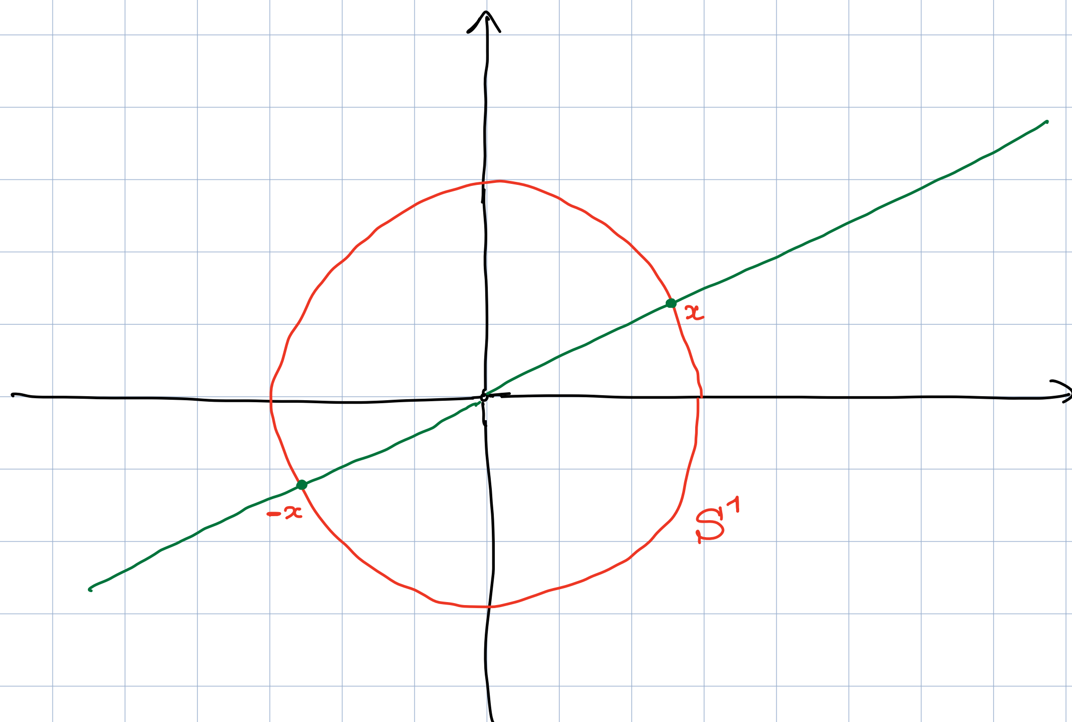


$\mathbb{P}(V) =$ "l'insieme delle rette in V private dell'origine"

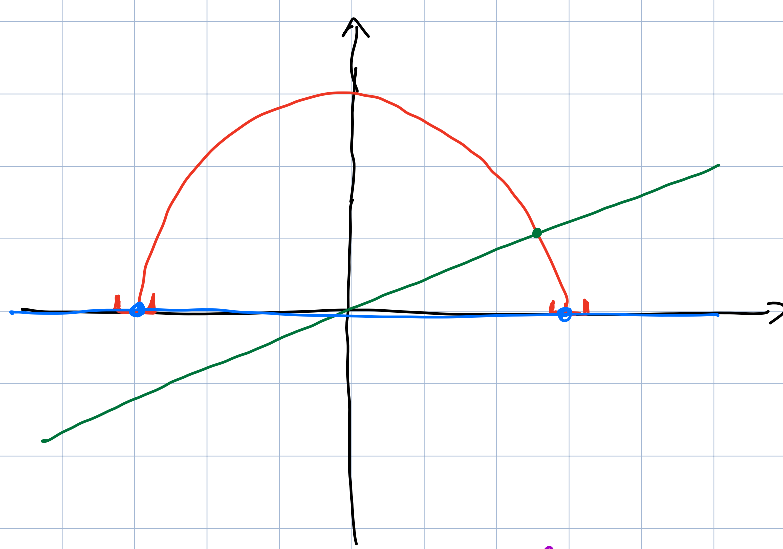
$\longleftrightarrow$ "l'insieme delle rette in V"

$\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) =$ l'insieme delle rette in $\mathbb{R}$ $=$ un punto (0-dim.)

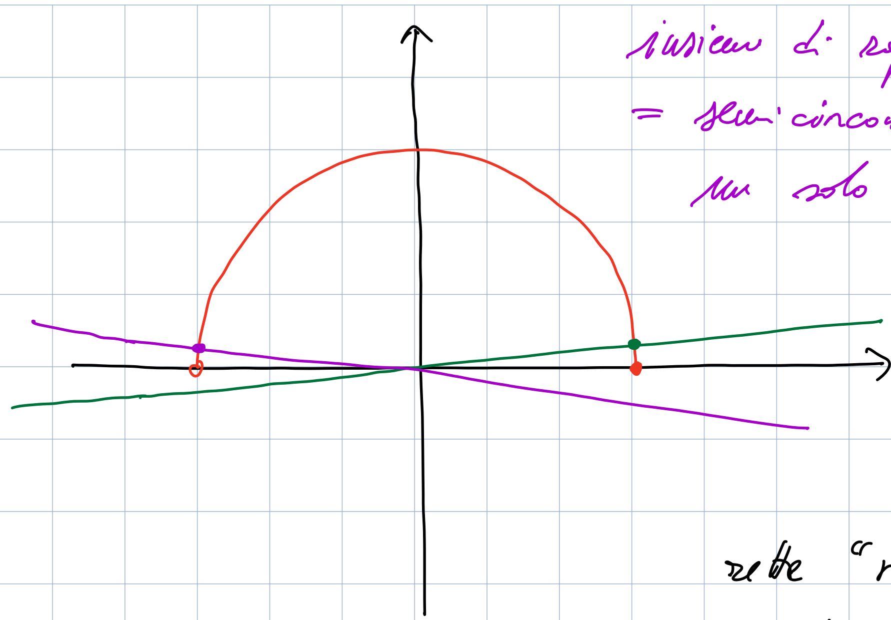
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^2$



$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1 \big/_{x \sim -x} \quad \longleftrightarrow$$



insieme rappresentanti sovrabbondante = semicirconf.
con entrambi estremi, che però sono identificati $\longleftrightarrow S^1$



insieme di rappresentanti
= semicirconf. con
un solo estremo

rette "vicine"
rappresentanti "lontani"

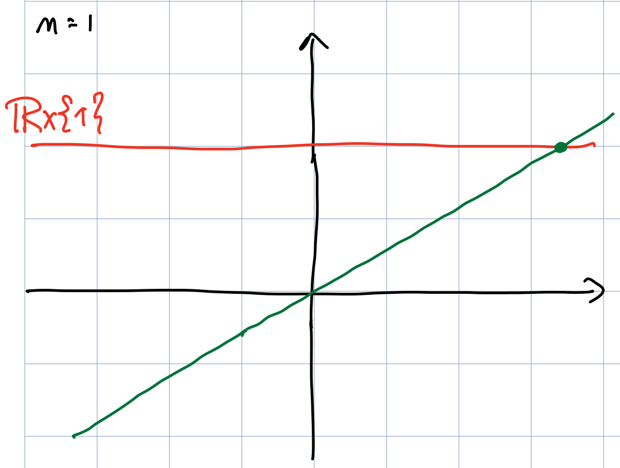
Conclusione $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow S^1$ (1-dimensionale)

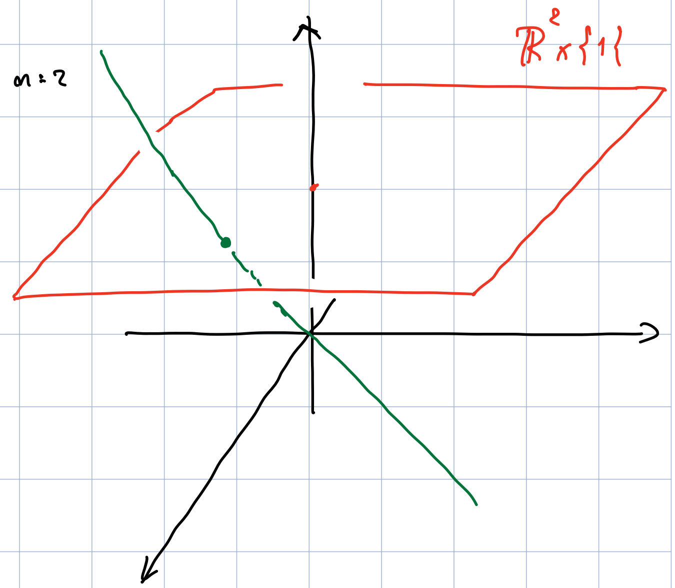
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \text{"le rette in } \mathbb{R}^{n+1}\text{"}$$

$$= S^n \big/ _{x \sim -x}$$

insieme "doppio" di rappresentanti

Oss: $\mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$





interseca ogni retta per O in $\mathbb{R}^{n+1}$ in al più un pto

$\Rightarrow$ è insieme di rappresentanti ma non di tutte le classi di equiv $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

ma $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ contiene inoltre...

$n = 1$ un pto

$n = 2$ le rette in $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ cioè $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$\forall n$ le rette in $\mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^n$ cioè $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$