Geometria 6/4/22

Parabola = luogo $\mathcal{P} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \ d(P,F) = d(P,\ell) \}$, $F \notin \ell$

Modello metrico parabola $y = \alpha x^2$ $\quad \alpha > 0$

cioè $\forall \mathcal{P}$ parabola esiste isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$f(\mathcal{P}) = \{ y = \alpha x^2 \}$.

Modello affine : $y = x^2$ $\quad \left(y = \alpha x^2 \quad y \mapsto \alpha \cdot y \right)$

Circonf: $\mathcal{C} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \ d(P,C) = r \}$

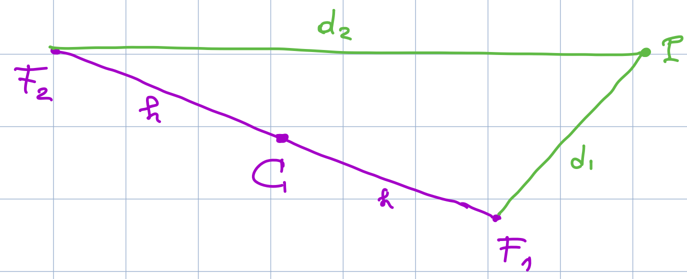
Traslando C in O : modello metrico $x^2 + y^2 = r^2$

Modello affine : $x^2 + y^2 = 1$ $\quad \left(x^2 + y^2 = r^2 : \ x \mapsto r \cdot x, \ y \mapsto r \cdot y \right)$

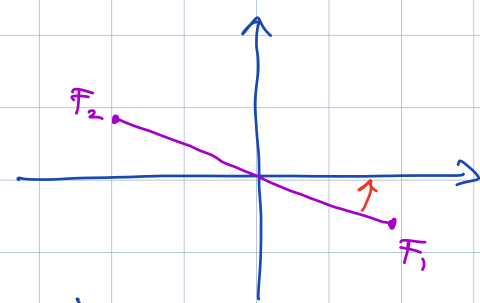
<u>Ellisse</u>: dati $F_1 \neq F_2 \in \mathbb{R}^2$, $\quad k > 0$

$$\mathcal{E} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \ d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2k \}$$

disug. tria: $k > h$



$d_1 + d_2 = 2k$

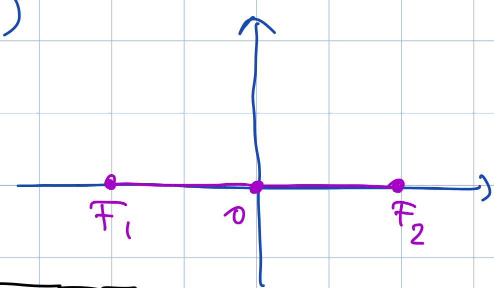


- trasliamo C in O

- ruoto finché F_1, F_2 sono su ascisse

$\Rightarrow \quad F_1 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;



$$P \in \mathcal{E} \iff \sqrt{(x-h)^2+y^2} + \sqrt{(x+h)^2+y^2} = 2k$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 - 4k\sqrt{(x+h)^2+y^2} + \cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\iff \cancel{4}xh + \cancel{4}k^2 = \cancel{4}k\sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2h^2 + \cancel{2xhk^2} + k^4 = k^2x^2 + \cancel{2xhk^2} + k^2h^2 + ky^2$$

$$\iff x^2(k^2-h^2)+k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\iff \boxed{\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2-h^2} = 1} \qquad k^2-h^2>0 \qquad a=k,\ b=\sqrt{k^2-h^2}$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

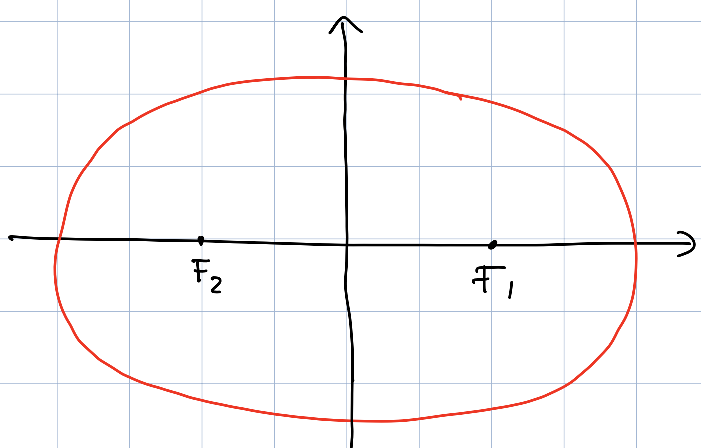
equazione canonica metrica dell'ellisse.

Fatto: gli elevamenti al $\square$ non hanno aggiunto soluzioni.

Equazione canonica affine $x^2+y^2=1$

$\left(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ , \ x \mapsto a\cdot x \ , \ y \mapsto b\cdot y \right)$

Oss: circonf. = ellisse a meno di affinità

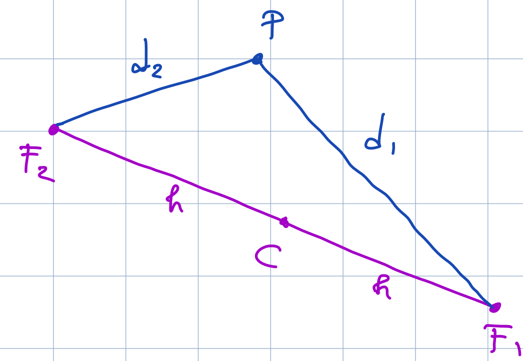


Iperbole: $F_1 \neq F_2 \in \mathbb{R}^2 \qquad k>0$

$$\mathcal{I} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \left| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right| = 2k \right\}$$

$d(F_1,F_2)=2h$

$\Longrightarrow \quad k<h$



A meno di isom.:

$F_1=\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F_2=\begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\quad P\in \mathcal{Y} \iff \left|\sqrt{(x-h)^2+y^2}-\sqrt{(x+h)^2+y^2}\right|=2k$

$$\iff \sqrt{\quad - \quad} - \sqrt{\quad + \quad} = \pm 2k$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{\quad - \quad}\right)^2 = \left(\sqrt{\quad + \quad} \pm 2k\right)^2$$

stessi passaggi

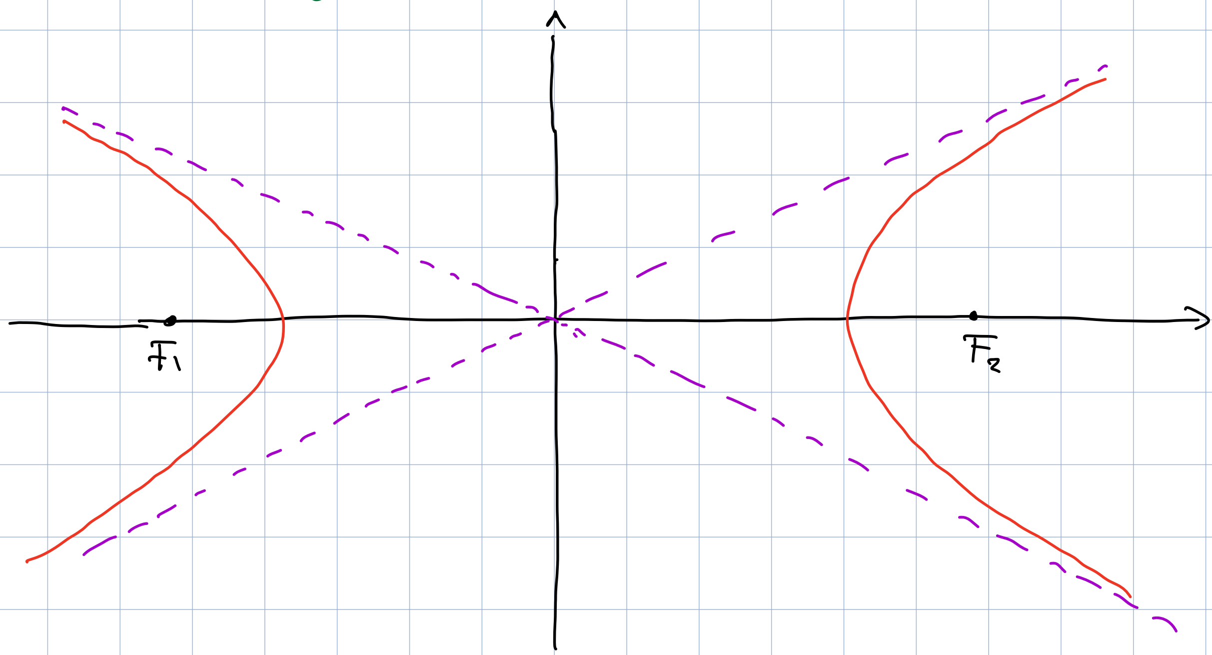
$$\Longrightarrow \left(\left(\dots\right)\right)^2 = \left(\pm 2k\sqrt{\quad + \quad}\right)^2$$

stessa equazione

$$\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{h^2-k^2}=1 \qquad h^2-k^2>0 \qquad a=k, \quad b=\sqrt{h^2-k^2}$$

Equazione canonica metrica iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Equazione canonica affine iperbole: $x^2 - y^2 = 1$.

Modelli affini: $\boxed{\underset{per}{y = x^2} \qquad \underset{ell}{x^2+y^2=1} \qquad \underset{iperb}{x^2-y^2=1}}$.

Oss: sono equaz. polinomiali di II grado in x, y.

Q: quali luoghi a meno di trasf. affini sono definiti da equaz. polinomiali?

pre-A : non solo loro

$\boxed{x^2+y^2+1=0}$, $x^2+y^2=0$, $x=0$, $x^2=0$

$\emptyset$ pto retta retta doppia

$x^2=1$, $x^2=y^2$ ....

2 rette // 2 rette X

$q(x,y)=7x^2-18xy+4y^2 \rightsquigarrow Q=\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$q(x,y)= {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$a(x,y) = 7x^2-18xy+4y^2+5x-6y+33$

Visto: $\mathbb{R}^2$ affine $= \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$

$a(x,y) = \underline{7x^2-18xy+4y^2+5x\cdot 1-6y\cdot 1+33\cdot 1^2}$

Fatto: posto $A=\begin{pmatrix} 7 & -9 & 5/2 \\ -9 & 4 & -3 \\ 5/2 & -3 & 33 \end{pmatrix}$

Vogliamo classificare a meno di affinità il luogo $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : q(x,y) = 0 \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Scriviamo $A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}2 \\ \}1 \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{2} \quad \underbrace{\quad}_{1} & \end{array}$.

Cambio di coord. affine : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tM \cdot A \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Effetto del cambio :

$$A \rightsquigarrow {}^tM \cdot A \cdot M.$$

Quindi $\begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \cdot B & Q \cdot v + {}^t\ell \\ \ell \cdot B & \ell \cdot v + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tB \cdot Q \cdot B & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

dunque $Q \rightsquigarrow {}^tB \cdot Q \cdot B$.

Oss: $\{ a(x,y) = 0 \} = \{ -a(x,y) = 0 \}$

quindi nella classificazione si può anche sostituire

$$\left.\begin{array}{l} A \rightsquigarrow -A \\ Q \rightsquigarrow -Q \end{array}\right\} \text{insieme.}$$

Fatto: poiché A, Q sono simmetriche posso applicare il Teo spettrale (ottenendo M, B ortog).

Def: Il luogo $\mathcal{C}$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$
è detto conica non degenere se $\det(A) \neq 0$.

Teo: $\mathcal{C}$ conica non degenere definita da A è a meno di trasf. affini:

- parabola $y = x^2$ se $d_2 = 0$ $(d_3 \neq 0)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
- ellisse $x^2 + y^2 = 1$ se $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- iperbole $x^2 - y^2 = 1$ se $d_2 < 0$ $(d_3 \neq 0)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- vuoto $x^2 + y^2 + 1 = 0$ se $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d_j = \det(\text{angolo } j \times j \text{ in alto a sinistra})$

Esempi: $x^2 - 5xy + 7y^2 - 3x + 8y + 2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & -3/2 \\ -5/2 & 7 & 4 \\ -3/2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = 7 - 25/4 > 0$

$d_3 = 14 - 15 - 15 - \frac{63}{4} - \frac{25}{2} - 16 < 0$

ellisse

Fatto: è possibile classificare anche coniche degeneri ($\det A = 0$) riscrivendo l'equazione in modo opportuno.

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

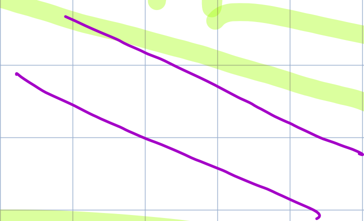
$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = 0$

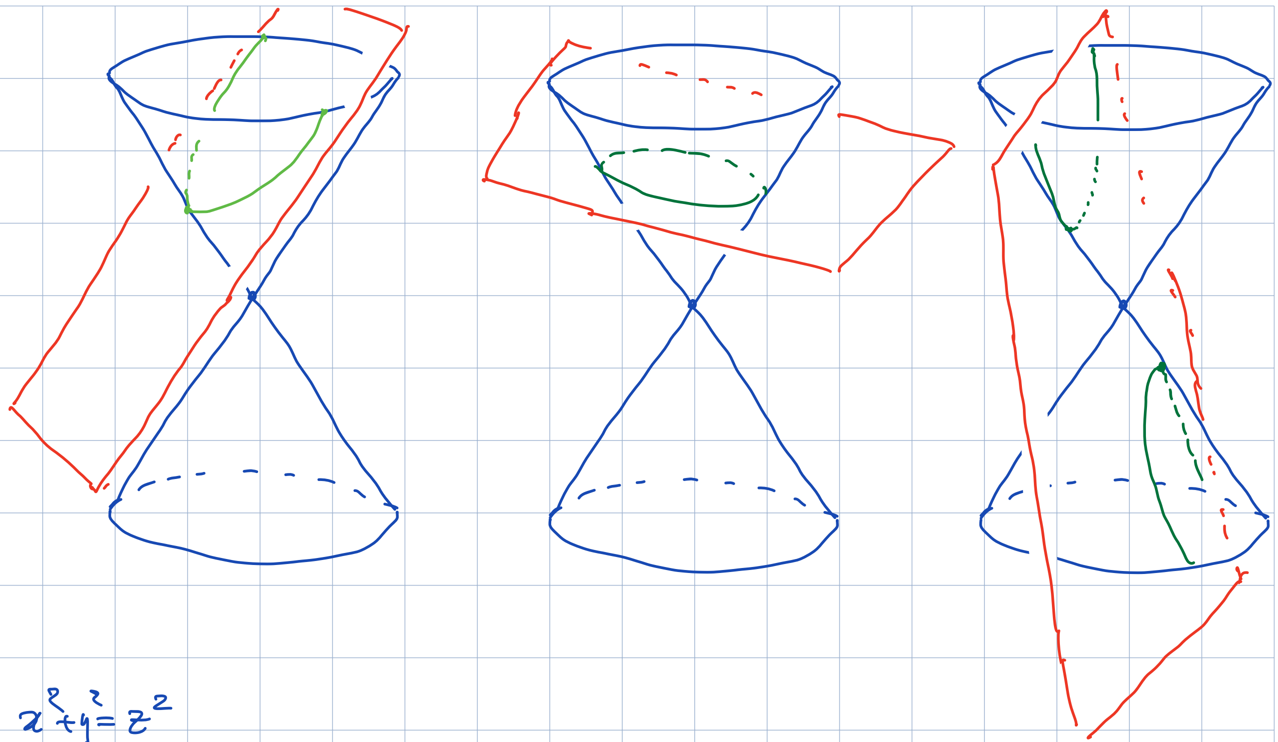
$d_3 = +4 + 4 - 4 - 4 = 0$

Il teorema non si applica.

$(x - 2y + 1)^2 = 1$



Fatto: parab. ell. iperbole sono sezioni di un cono tramite piano non passante per vertice:



$x^2+y^2=z^2$

Spazi proiettivi

X insieme ; chiamo relazione su X un sottoinsieme R di $X \times X = \{ (x, x') : x, x' \in X \}$

Es : X = genere umano
R = essere figlio di

$R \subset X \times X$; $R = \{ (\text{Federico P.}, \text{Carlo. P}), (\text{Nadolino}, \text{Sonia}), \dots \}$

$R \not\ni (\text{Sonia}, \text{Carlo})$

Scriviamo anche xRx' se $(x, x') \in R$

$(\text{Nad}, \text{Sonia}) \in$ "essere figlio di" leggiamo
Nad è figlio di Sonia

Una relazione R si dice:

- riflessiva se xRx $\forall x \in X$
- simmetrica se $xRy \Rightarrow yRx$
- transitiva se xRy e $yRz \Rightarrow xRz$
- di equivalenza se è rifl. simm. e transitiva.

Esempio: xRy se x è residente nello stesso comune in cui è residente y.

- rifl. ✓
- simm ✓
- trans ✓

Una relaz. R si dice

- antisimmetrica se xRy e $yRx \Rightarrow y = x$
- di ordine se è antisimm. e transitiva.

Es (1) $X = \mathbb{R}$ $\quad R$: "$\leq$"

- $x \leq y$, $y \leq x$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $y = x$ sì
- $x \leq y$, $y \leq z$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $x \leq z$ sì

(2) $X =$ i sottoinsiemi di $\{A, B, C, D\}$
R : "$\subseteq$"

- $S, T \subset \{A, B, C, D\}$; $S \subseteq T$, $T \subseteq S$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $S = T$ sì
- $S, T, U \subset \{A, B, C, D\}$
  $S \subseteq T$, $T \subseteq U$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $S \subseteq U$ sì

Oss: non è un ordine totale: esistono elementi incomparabili

$$\{A, B\} \cancel{\subseteq} \{A, C, D\}$$

$$\{A, C, D\} \cancel{\subseteq} \{A, B\}$$

Fissiamo R relaz. di equiv. su X.
Dato $x \in X$ chiamo classe di equivalenza
$$[x] = \{y \in X \ : \ xRy\}$$

ES: X = noi oggi qui

R = risiedere stesso comune

$[\text{Nadalino}] = \{\text{Nadalino}\}$

$[\text{Sali}] = \{\text{Sali}, \text{Thomas}, \text{Matteo}\}$.

Prop: le classi di equivalenza sono una partizione di X

- la loro unione è X
- due di loro o coincidono o sono disgiunte.

Dim: •) $x \in [x]$ grazie alla riflessiva

$\Rightarrow \bigcup$ tutte le classi $= X$

•) proviamo che se $[x] \cap [y] \ni z$

allora $[x] = [y]$.

$$z \in [x],\ z \in [y] \Rightarrow \underbrace{xRz,\ \underset{zRy}{\overset{yRz}{\Downarrow \text{simm.}}}}_{\text{trans.}}$$

$$\Rightarrow xRy \quad (\text{e } yRx)$$

$w \in [x]$ cioè xRw; poiché yRx ho (trans)

yRw, cioè $w \in [y]$.

Ho provato che $[x] \subseteq [y]$; viceversa analogo

$\Longrightarrow [x] = [y]$.

$\blacksquare$