Geometria 31/3/22

$\mathcal{H}_n$ = hermitiane $\mathcal{J}_n$ = antihermitiane

No $\mathbb{C}$-sottosp. di $M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$I_n \in \mathcal{H}_n$ $\quad i\cdot I_n \notin \mathcal{H}_n$

$i I_n \in \mathcal{J}_n$ $\quad i\cdot(i\cdot I_n) \notin \mathcal{J}_n$

Sì $\mathbb{R}$-sottosp.:

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda\cdot A)^* = \lambda \cdot A^*$ ...

$\dim_{\mathbb{R}}$: quanti par. liberi reali scelgo? Sia $\mathcal{H}_n$ sia $\mathcal{J}_n$

diago: n

fuori: $2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} = n^2 - n$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n) = \dim(\mathcal{J}_n) = n^2$

($\dim_{\mathbb{C}} M_{n\times n}(\mathbb{C}) = n^2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} M_{n\times n}(\mathbb{C}) = 2n^2$

torna con: $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_n$)

$M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_n$

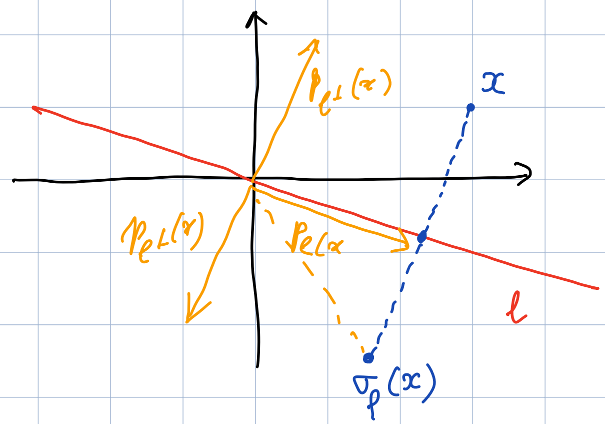
$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^*)}_{P_{\mathcal{H}_n}(A)} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^*)}_{P_{\mathcal{J}_n}(A)}$$

$A \longmapsto A^*$ $\quad \mathbb{R}$-lin. no $\mathbb{C}$-lin

$\Rightarrow P_{\mathcal{H}_n}, P_{\mathcal{J}_n}$ $\quad \mathbb{R}$-lin. no $\mathbb{C}$-lin.

Verificare che $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ $\quad c = \cos(\vartheta) \quad s = \sin(\vartheta)$

è riflessione rispetto a retta:



$$x = p_\ell(x) + p_{\ell^\perp}(x)$$

$$\sigma_\ell(x) = p_\ell(x) - p_{\ell^\perp}(x)$$

$$= p_\ell(x) - (x - p_\ell(x))$$

$$= -x + 2p_{\ell^\perp}(x)$$

se $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ genera ℓ, $\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| = 1$,

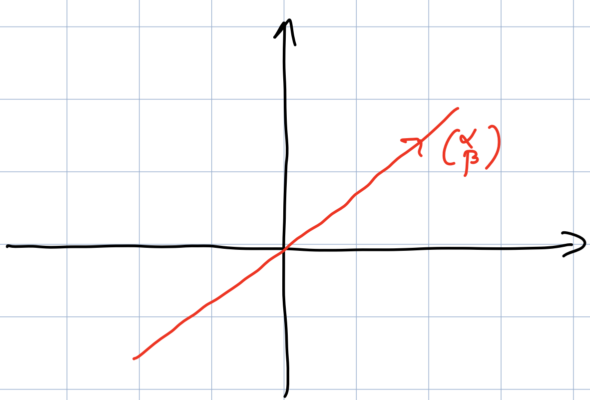
dunque $\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ genera $\ell^\perp$ ho

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \sigma_\ell \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

<u>I soluz:</u> trovo espressione σ_ℓ :

Oss: se $\ell = Span\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



$$\sigma_\ell = \left(\text{rotaz. } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \left(\text{rotaz } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ +\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \beta^2-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

È $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ $\quad c = \cos\vartheta$, $s = \sin\vartheta$?

sì per $\alpha = \cos(\vartheta/2)$
$\beta = \sin(\vartheta/2)$.

II modo: cerco $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\left\|\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right\| = 1$ t.c.

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-c)\alpha = s\beta \\ s\alpha = (1+c)\beta \end{cases}$$

I: $(1-c)\alpha = \sqrt{1-c^2} \cdot \beta$

$\sqrt{1-c} \cdot \sqrt{1-c} \cdot \alpha = \sqrt{1-c} \cdot \sqrt{1+c} \cdot \beta$

$\sqrt{1-c} \cdot \alpha = \sqrt{1+c} \cdot \beta$

II: ... uguale

soluz:

$$\alpha = \underbrace{\sqrt{\frac{1+c}{2}}}_{=\cos(\vartheta/2)} \qquad \beta = \underbrace{\sqrt{\frac{1-c}{2}}}_{=\sin(\vartheta/2)}$$

stesso

Teo: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ $A^* \cdot A = A \cdot A^*$
$\Rightarrow \exists M$ t.c. $M^* = M^{-1}$, $M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\to$ autoval. unitarie hanno modulo 1
$\to$ autoval. antihermitiane sono immaginari puri.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale $\left(\begin{aligned} &= \text{isometrie} \\ &= \text{mov. rigido } \mathbb{R}^n \end{aligned}\right)$

${}^tA = A^{-1}$, ${}^tA = A^*$ $\Rightarrow$ A unitaria
$\Rightarrow$ ha autovalori di modulo 1.

$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow$ posso scegliere autovett. reale

$\lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$ sin $\vartheta \neq 0$

Se $z = x + i \cdot y$ è un autovettore complesso ho:

- $A \cdot z = \lambda \cdot z$

$\Rightarrow \overline{A} \cdot \overline{z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} \Rightarrow A \cdot \overline{z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$

$\Rightarrow \overline{z}$ è autovett. di A rispetto a $\overline{\lambda} \neq \lambda$

$\Rightarrow \overline{z} \perp_{\mathbb{C}^n} z$

$\Rightarrow \langle z | \overline{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$

$$\Rightarrow \langle x+iy \mid x-iy \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\Rightarrow {}^t\overline{(x-iy)} \cdot (x+iy) = 0$$

$$\Rightarrow ({}^t x + i\,{}^t y)(x+iy) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{{}^t x \cdot x}_{\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}} + i \cdot \underbrace{{}^t y \cdot x}_{\langle y|x\rangle_{\mathbb{R}^n}} + i\, \underbrace{{}^t x \cdot y}_{= \langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n}} - \underbrace{{}^t y \cdot y}_{\|y\|^2_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\|x\|^2 - \|y\|^2\right) + 2i \langle x|y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| = \|y\| \qquad \langle x|y\rangle = 0$$

e posso supporre $\|x\| = \|y\| = 1$

Morale: ho trovato base ortonormale (x, y) di $\operatorname{Span}(z, \bar{z})$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- $A \cdot z = (\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta) \cdot z$

$$\Rightarrow A \cdot (x + i \cdot y) = (\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)(x + iy)$$

$$\Rightarrow A \cdot x + i \cdot \boxed{A \cdot y} = \boxed{\cos\vartheta \cdot x - \sin\vartheta \cdot y} + i\boxed{(\sin\vartheta \cdot x + \cos\vartheta \cdot y)}$$

$\Rightarrow$ $A \cdot x = \cos\vartheta \cdot x - \sin\vartheta \cdot y$

$A \cdot y = \sin\vartheta \cdot x + \cos\vartheta \cdot y$

$\Rightarrow$ Su $\mathrm{Span}(x,y)$ la A agisce come $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ||

rotaz. di angolo $-\vartheta$

<u>Teo</u>: Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale esiste una base $M = (u_1, \dots, u_n)$ ortonormale (M è matr. ortog.). t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & & \\ & \boxed{B_2} & & & \\ & & \boxed{B_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

con $B_j = (\pm 1) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$

oppure $B_j = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\boxed{n=2}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

id $\quad$ rifl. $\quad$ rotaz. π $\quad$ rotaz ϑ

||

rotaz. 0

$\Rightarrow$ le isometrie lineari di $\mathbb{R}^2$ sono rotaz. e rifl.

$\boxed{n=3}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

id   rifl. piano   rifl. retta = rotaz. π

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

rifl. 0 = rotaz. π + rifl.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$

rotaz ℓ rotaz. ℓ $\circ$ rifl. $\ell^\perp$

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad {}^tA = -A$

$\Longrightarrow$ antihermitiana $\Longrightarrow$ autoval. imm. puri e diago via unitarie.

$\lambda = i\cdot\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$

$\lambda\in\mathbb{R} \qquad \alpha=0$ posso prendere autovett. reale

$\lambda\notin\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$; se $z = x+iy$ è autovett. allora $\bar{z}$ è autovett. risp. a $\bar{\lambda}$

$\Longrightarrow$ posso prendere (x,y) base ortonormale reale di $\mathrm{Span}(z,\bar{z})$

$$A\cdot(x+iy) = i\cdot\alpha\cdot(x+iy)$$

$$\boxed{A\cdot x} + i\cdot\boxed{A\cdot y} = \boxed{-\alpha\cdot y} + i\cdot\boxed{\alpha\cdot x}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A\cdot x = -\alpha y \\ A\cdot y = \alpha\cdot x \end{array}$$

$\Rightarrow$ Su $\mathrm{Span}(x,y)$ la A agisce come $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

<u>Teo</u>: A antisimm. $\Rightarrow \exists M$ $\quad {}^tM = M^{-1}$

$$M^{-1}\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & 0 \\ & \boxed{B_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$B_j = (0) \in M_{1\times 1}$ $\qquad B_j = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

$\boxed{n=3}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad$ A isometria se

$x \longmapsto A\cdot x$ $\qquad$ (lineare)

preserva le distanze.

<u>Estendo</u>: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria se $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sono tutte lineari?
No: ci sono le traslazioni; fissato $v \in \mathbb{R}^n$

$$f : x \longmapsto x + v$$

$$d(f(x), f(y)) = \| f(x) - f(y) \| = \| (x+v) - (y+v) \| = \| x - y \| = d(x,y).$$

Oss: composizione di isometrie lo è.

Dunque $f : x \mapsto A \cdot x + v$, A ortogonale, isometria.

Def: chiamo trasf. affine di $\mathbb{R}^n$ una del tipo

$$f : x \longmapsto A \cdot x + v$$

con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n$.
(composiz. di lineari e traslazioni)

Teo: tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono affini, ovvero $x \longmapsto A \cdot x + v$ con A ortogonale.

Dimo ($n=2$): OSS:
- la composizione di affini è affine
- l'inversa di affine è affine (esercizio)

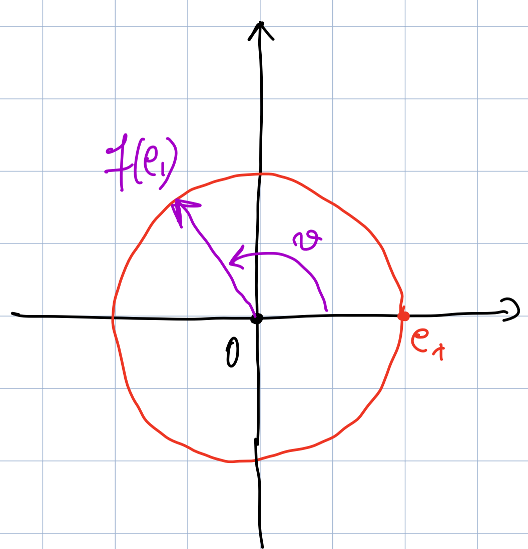
Prendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria e faccio varie sostituzioni $f \rightsquigarrow g \circ f$ con g isom. affini arrivando alla fine a $f = id$. Questo basta perché:

$$f \rightsquigarrow g_1 \circ f \rightsquigarrow g_2 \circ g_1 \circ f \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow g_k \circ \dots \circ g_1 \circ f = id$$

$$\Longrightarrow f = g_1^{-1} \circ \dots \circ g_k^{-1} \quad \text{è affine.}$$

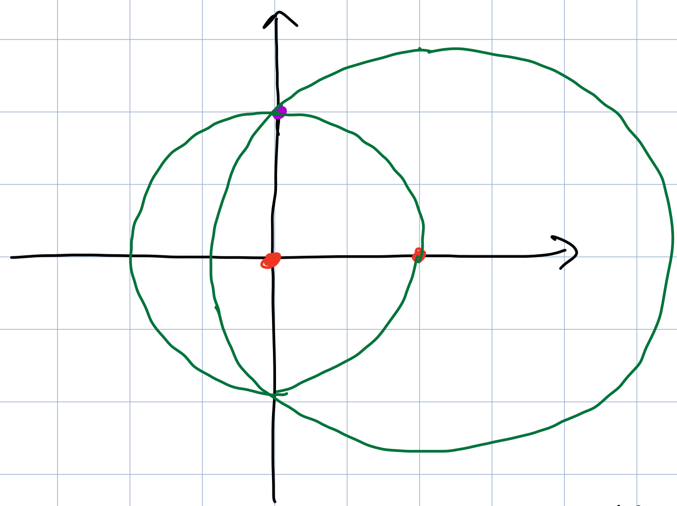
1. Se $f(0) = v$ sostituisco f con $g \circ f$ dove $g : x \longmapsto x - v$; ora ho $f(0) = 0$.

2. Poiché $f(0) = 0$, $d(0, f(e_1)) = d(f(0), f(e_1))$
$= d(0, e_1) = 1$



Sostituisco f con $g \circ f$
g = rotaz. angolo $-\vartheta$

3. Ora ho $f(0) = 0$, $f(e_1) = e_1$.
$d(0, f(e_2)) = d(f(0), f(e_2)) = d(0, e_2) = 1$
$d(e_1, f(e_2)) = d(f(e_1), f(e_2)) = d(e_1, e_2) = \sqrt{2}$



$\Longrightarrow f(e_2) = \pm e_2$

Se $f(e_2) = e_2$, ok; altrimenti sostituisco f con $g \circ f$ $\quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

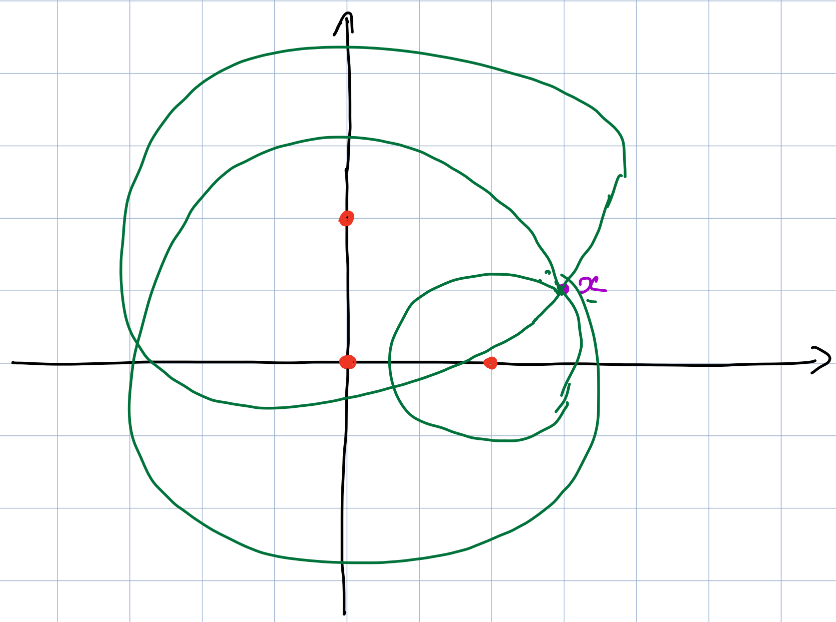
4. Ora ho f isometria

$$f(0) = 0, \quad f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2.$$

Affermo che $f = id$:

Se $x \in \mathbb{R}^2$

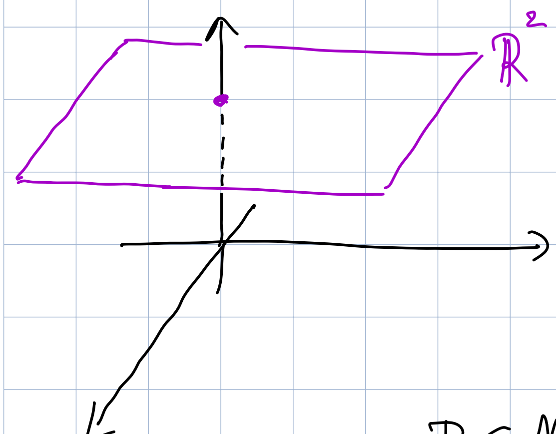
$$d(0, f(x)) = d(0, x)$$
$$d(e_1, f(x)) = d(e_1, x)$$
$$d(e_2, f(x)) = d(e_2, x)$$



$f(x) \in$ tre circonf. con centri non allineati passanti per x; ma esse si incontrano in un solo punto $\Rightarrow f(x) = x$. ☒

esercizio

<u>Oss</u>: posso identificare $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$



Le trasf. naturali di $\mathbb{R}^{n+1}$ sono quelle lineari, associate a matrici. Quali di esse preservano $\mathbb{R}^n \times \{1\}$?

$$B \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} A & v \\ \omega & c \end{array} \right) & \begin{array}{l} \}n \\ \}1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n} & \underbrace{\quad}_{1} \end{array} & \end{array}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} A & v \\ \omega & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x$$

$$\omega \cdot x + c = 1 \quad \forall x$$

$x = 0 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \omega \cdot x = 0 \quad \forall x \Rightarrow \omega = 0$

Dunque $B = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

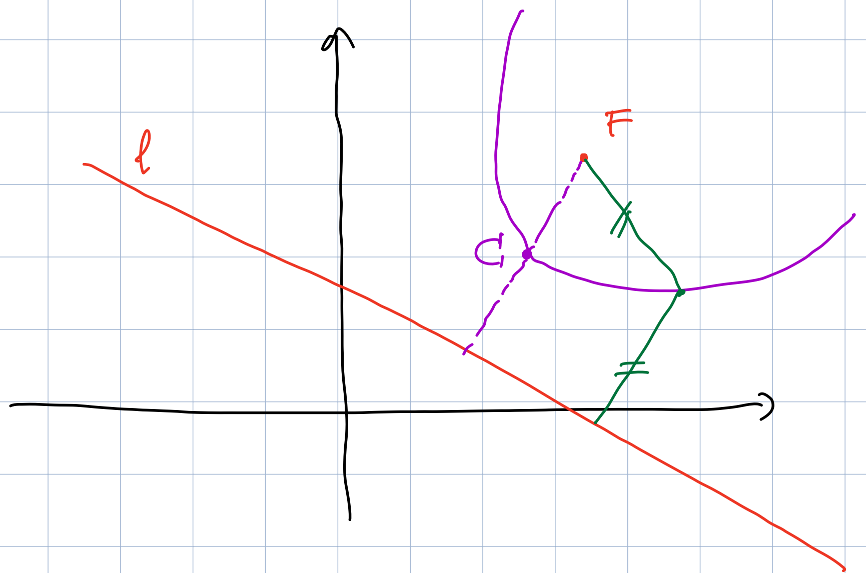
$$B \cdot \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A \cdot x + v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scoperto: le trasf. lin. di $\mathbb{R}^{n+1}$ che preservano $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ sono quelle che agiscono su $\mathbb{R}^n$ come affini.

Data una classe $\mathcal{C}$ di luoghi geometrici in $\mathbb{R}^n$ dare modelli metrici oppure affini per quella classe significa dare una lista $\mathcal{L}$ di tali luoghi t.c.

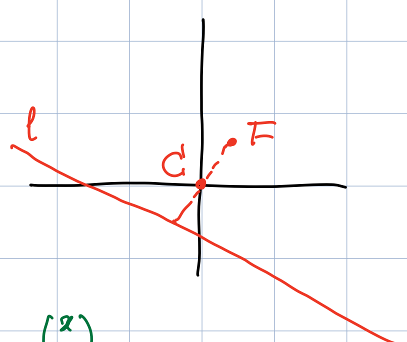
$\forall C \in \mathcal{C}$ esiste una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria oppure trasf. affine t.c. $f(C) \in \mathcal{L}$.

Chiamo parabola in $\mathbb{R}^2$ il luogo dei punti equidistanti da retta ℓ e da pto $F \notin \ell$.

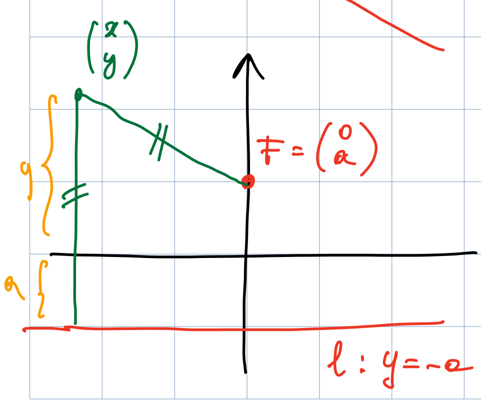


Modello metrico: data par. qualsiasi

- applichiamo isometria (rotaz) che manda C in O



- ruoto intorno intorno a O finché ℓ non è orizzontale



$$d\left(\binom{x}{y},\binom{0}{a}\right) = d\left(\binom{x}{y}, \{y=-a\}\right)$$

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2} = |y+a|$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2ay+\cancel{a^2}=\cancel{y^2}+2ay+\cancel{a^2}$$

$$y=\frac{1}{4a}\cdot x^2$$

Modello metrico parabola:

$$y = \alpha \cdot x^2 \qquad \alpha > 0.$$

$\Rightarrow$ ogni parabola (luogo dei pti equidist. da ℓ e $F \notin \ell$) diventa $y = \alpha \cdot x^2$ tramite una isometria.