

Geometria 30/3/22

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad {}^t A = A$
 $\Rightarrow \exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad {}^t M = M^{-1}, M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Con: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

$A = \left(\underbrace{A_k}_{k \times k} \dots \right) \}_{k=1}^n \quad d_k = \det(A_k)$

Teo: se $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \neq 0$ i segni di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i segni di $d_1, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1}$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$d_1 = 4 > 0$

$d_2 = 8 - 9 < 0$

$d_2/d_1 < 0$

$d_3 = 8 - 15 - 15 - 2 - 5 - 100 < 0$

$d_3/d_2 > 0$

Conclusione: A ha autovalori $++-$

Dimo: prova per induzione su k che i segni degli autovalori di A_k sono quelli di $d_1, d_2/d_1, \dots, d_k/d_{k-1}$: $k=n$ tesi.

$$k=1 \quad A_1 = (a_{11}) = (d_1) \quad \underline{OK}$$

Supponiamo vero per k ; dimostriamo per $k+1$.

idea: il det di una matrice è il prodotto degli autoval.
Sapendo il segno se la parità del numero di
autoval. pos. e negativi; faccio vedere che se
passando da k a $k+1$ il numero non è pari
allora è stabilito almeno di 2 e provo che
questo viola ipotesi induttiva.

almeno $k-2$ pos.
(ma $d_k \neq 0$)

Supponiamo che A_k abbia r autoval negativi e per
ipotesi induttiva che ci siano r segni neg. tra $d_1, d_2/d_1, \dots, d_k/d_{k-1}$.

Casi da considerare:

P) r pari ($d_k > 0$)

D) r dispari ($d_k < 0$)

$$1) d_{k+1} > 0$$

$$2) d_{k+1} < 0$$

$$3) k+1 = n, \quad d_{k+1} = 0.$$

Corrisp. dato dimostrare:

P1) r autoval neg. per A_{k+1}

D1) $r+1$ autoval neg.

P2) $r+1$ autoval neg.

D2) r autoval neg.

P3) r neg, 1 nullo

D3) r neg, 1 nullo

Caso P2: A_k ha ν autovel neg, ν pari, $d_{k+1} < 0$
 Devo vedere che A_{k+1} ha $\nu+1$ autovel. neg.

Poiché $d_{k+1} = \det(A_{k+1}) < 0$ e $\nu+1$ è dispari
 oppure $\underbrace{m \text{ ha } \leq \nu-1}_{\downarrow}$ o $\geq \nu+3$ negativi.

$$(*) \quad \geq k+1 - (\nu-1) = k-\nu+2 \text{ pos.}$$

So che A_k ha ν autovel neg
 $\Rightarrow$ è diag via autop. a $\begin{pmatrix} \underbrace{>0 \dots}_{k-\nu} & 0 \\ \hline & \underbrace{<0 \dots}_{\nu} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}^{k-\nu} \\ \}^{\nu} \end{matrix}$

Quindi ho sottospazi:

$$\begin{aligned} X_+ \subset \mathbb{R}^k, \dim X_+ = k-\nu, \text{ t.c. } & \langle x|x \rangle_{A_k} > 0 \quad \forall x \in X_+, x \neq 0 \\ X_- \subset \mathbb{R}^k, \dim X_- = \nu, \text{ t.c. } & \langle x|x \rangle_{A_k} < 0 \quad \forall x \in X_-, x \neq 0 \end{aligned}$$

Se tesi falsa so due cose $(*)$ o $(*)$:

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \exists X'_+ \subset \mathbb{R}^{k+1} \dim \geq k-\nu+2 \\ \text{t.c. } \langle x|x \rangle_{A_{k+1}} > 0 \quad \forall x \in X'_+, x \neq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ho

X_- dim ν su cui è def. neg. $\subset \mathbb{R}^{k+1}$
 X'_+ dim $\geq k-\nu+2$ su cui è def. pos. $\subset \mathbb{R}^{k+1}$

$$\nu + (k - \nu + 2) > k+1 \rightarrow \exists x \neq 0, x \in X_- \cap X'_+$$

$$\text{allora } \langle x/x \rangle_{A_{k+1}} > 0 \quad x \in X'_+ \quad \text{assunto}$$

$$(*) \geq \nu+3 \text{ neg.} \Rightarrow \exists X'_- \text{ dim } \geq \nu+3 \text{ l.e.}$$

$$\langle x/x \rangle_{A_{k+1}} < 0 \quad \forall x \in X'_-, x \neq 0.$$

$$X_+ \text{ dim } k-\nu \text{ su cui è def. pos. } \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

$$X'_- \text{ dim } \geq \nu+3 \text{ su cui è def. neg. } \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

$$(k-\nu) + (\nu+3) > k+1 \Rightarrow X_+ \cap X'_- \neq \{0\}$$

... assunto. [Altri 5 casi...]

_____ o _____

Visto: Taylor II

$$f(x+v) = f(x) + Jf(x) \cdot v + \frac{1}{2} \langle v/v \rangle_{Hf(x)} + o(\|v\|^2)$$

Dunque x è max o min loc. ho $Jf(x) = 0$
cioè $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall j$.

Sapendo che $Jf(x) = 0$, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono
gli autoval. di $Hf(x)$ ho, dopo cambio
coordinate isometrico ho

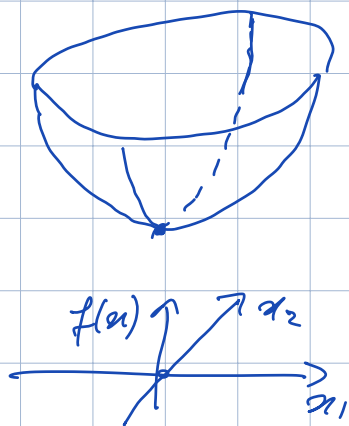
$$f(x+v) = f(x) + \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 + o(\|v\|^2)$$

$n=2$

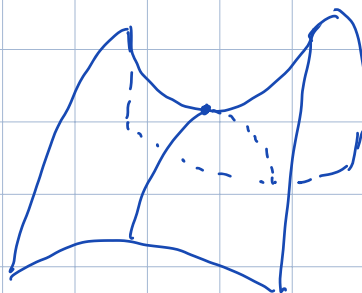
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

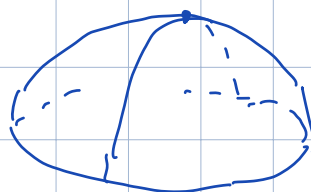
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



min. loc.



né max né min loc



max loc.

Teo. • Se $Jf(x) = 0$ e $Hf(x)$ ha autoval. tutti pos (neg)
allora x è pto di min loc (max loc)

• Se x è pto di min loc (max loc)

allora $\text{Re}(f(a)) = 0$ e $\text{Im}(f(a))$ ha autoval ≥ 0 (≤ 0)

Teorema spettrale complesso

Ricordo : $A^* = {}^t \bar{A}$

Def:

- A hermitiana : $A^* = A$
- A anti hermitiana : $A^* = -A$
- A unitaria : $A^* = A^{-1}$
- A normale : $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

Oss: hermitiana, anti hermitiana, unitarie sono normali:
 $A \cdot A = A \cdot A$ $(-A) \cdot A = A \cdot (-A)$ $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$

ma ce ne sono altre.

Es: $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ -1+i & 2-3i \end{pmatrix} = \underbrace{1 \cdot I_2}_{\mathbb{R}} + \underbrace{\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -3i \end{pmatrix}}_{B = \text{anti-hermitiana}} \quad B^* = -B$

$$A^* \cdot A \neq A \cdot A^*$$

$$\begin{aligned} (2I_2 + B)^* \cdot (2I_2 + B) &\neq (2I_2 + B) \cdot (2I_2 + B)^* \\ (2I_2 - B) \cdot (2I_2 + B) &\neq (2I_2 + B) \cdot (2I_2 - B) \end{aligned}$$

$$\cancel{A^2 I_2 - 2B + 2B - B^2} \neq \cancel{2I_2 + 2B - 2B - B^2}$$

SE

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ normale $\Leftrightarrow$ diagonale unitaria
cioè ammette basi ortonormali
di $\mathbb{C}^n$ fatte da autovet.

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* \Leftrightarrow \exists M \text{ t.c. } M^* = M^{-1}, M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dimo: $\Leftarrow$ $M^* = M^{-1}$ $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ diagonale

$$A^* \cdot A \neq A \cdot A^*$$

$$(M^* \cdot D \cdot M)^* \cdot (M^* \cdot D \cdot M) \neq (M^* \cdot D \cdot M) \cdot (M^* \cdot D \cdot M)^*$$

$$\underbrace{M^* \cdot D \cdot M^*}_{I_n} \cdot M^* \cdot D \cdot M \neq M^* \cdot D \cdot \underbrace{M \cdot M^*}_{I_n} \cdot \underbrace{D \cdot M^*}_{I_n}$$

$$M^* \cdot \bar{D} \cdot D \cdot M \neq M^* \cdot D \cdot \bar{D} \cdot M$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

OK

$\Rightarrow$ Induzione su n .

$n=1$ ok.

Supponiamo vero per n .

Prendiamo $A \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*$$

Prendo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ autoval, u_0 autovettore unitario;
completo a base $N = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ ortonormale;

$$N^* = N^{-1} \quad ; \quad N^* \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad B \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Affermo che $N^* \cdot A \cdot N$ è normale: come sopra:

$$(N^* \cdot A \cdot N)^* \cdot (N^* \cdot A \cdot N) \neq (N^* \cdot A \cdot N) \cdot (N^* \cdot A \cdot N)^*$$

$$\underbrace{N^* \cdot A^* \cdot N \cdot N^* \cdot A \cdot N}_{\substack{I_n \\ A^* \cdot A}} \neq \underbrace{N^* \cdot A \cdot N \cdot N^* \cdot A^* \cdot N}_{\substack{I_n \\ A \cdot A^*}}$$

$\Rightarrow$

Dunque:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix}^*$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_0} & 0 \\ w^* & B^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & w \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\lambda_0} & 0 \\ w^* & B^* \end{pmatrix}$$

$$w \in \mathcal{M}_{1 \times n}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_0|^2 & \dots \\ \dots & \underbrace{w^* \cdot w + B^* \cdot B}_{\substack{(n \times 1) \times (1 \times n) \\ n \times n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_0|^2 + \|w\|^2 & \dots \\ \dots & B \cdot B^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w=0, \quad B^* \cdot B = B \cdot B^*$$

$$N^* \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} B \text{ normale} \\ N \text{ unitaria} \end{array}$$

conclusioni per induzione come nel caso reale. 

Teo: $A \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* \iff \exists M \in M_{m \times m}(\mathbb{C}) \\ M^* = M^{-1}, \quad M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Casi particolari hermitiani, antihermitiani, unitari.

Prop: A hermitiana $\Rightarrow$ ha autoval. reali
(e si diag. via unitaria).

Dim: A hermitiana $\iff \langle Av | w \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle v | Aw \rangle_{\mathbb{C}^m}$
 λ autoval, $v \neq 0$ autovett.

$$\begin{aligned}
 \langle A \cdot v | v \rangle &= \langle v | A \cdot v \rangle \\
 // & \qquad \qquad // \\
 \langle \lambda \cdot v | v \rangle &= \langle v | \lambda \cdot v \rangle \\
 // & \qquad \qquad // \\
 \lambda \cdot \|v\|^2 &= \overline{\lambda} \cdot \|v\|^2 \\
 \Rightarrow \lambda &= \overline{\lambda}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Corr: A hermitiana
 $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos. $\Leftrightarrow A$ ha autoval > 0 .
 (come nel caso reale)

Fatto: i separi degli autoval di A coincidono
 con quelli di $d_1, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1}$
 (se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$)

Cons: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ $\bar{c}$ def. pos. $\Leftrightarrow d_1, \dots, d_n > 0$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 3 & i \\ 2-3i & -i & -1 \end{pmatrix}$

$d_1 = 2 > 0$

$d_2 = 6 - (1+i)(1-i) = 6 - 2 = 4 > 0$

$d_3 = -6 + (i-i)(2-3i) + (2+3i)(-i-1) - 3(4+9)$
 $+2 - 2$

$$= -6 + \cancel{2i} + 3 - \cancel{2} + \cancel{3i} - \cancel{2i} - 2 + 3 - \cancel{3i} - 108 < 0$$

→ he autoval. di segni $++-$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $d_1 = 0$ il teo non si applica

Scambiamo prime coord.

cioè moltiplico a sin, dx per $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

diventa $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $d_1 = -3$
 $d_2 = -1$
 $d_3 = 10 + 10 - 4 + 12 > 0$

→ segni autoval $--+$

Direttamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1
2
3

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 4$
 $d_2 = 0$
 No Teorema

$d_1 = 4 > 0$

$d_2 = -1 < 0$

$d_3 = -12 - 12 - 9 - 16 < 0$

→ segni autoval.
 $+, +, -$

Prop: A antihermitiana ha autoval. imm. puri
(e diago. tri unitario)

Dimo:

$$\begin{aligned} \langle A \cdot v | v \rangle &= \langle v | -A \cdot v \rangle \\ // & // \\ \langle \lambda \cdot v | v \rangle &= \langle v | \lambda \cdot v \rangle \\ // & // \\ \lambda \cdot \|v\|^2 &= \bar{\lambda} \cdot \|v\|^2 \end{aligned}$$

□

Esercizio: $\mathcal{H}_n = \{ \text{tutte le hermitiane} \} \subset M_{n \times n}(\mathbb{C})$
 $\mathcal{Y}_n = \{ \text{tutte le antihermitiane} \}$

non sono sp. vet. di $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ come sp. vet. su $\mathbb{C}$
 ma si su $\mathbb{R}$; calcolare le loro dim su $\mathbb{R}$ e
 provare che $M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n \oplus_{\mathbb{R}} \mathcal{Y}_n$

Prop: A unitaria $\Rightarrow$ autoval. di modulo 1
(e diago. via unitario)

Dimo:

$$\begin{aligned} \langle A \cdot v | A \cdot v \rangle &= \langle v | v \rangle = \|v\|^2 \\ // & // \\ \langle \lambda \cdot v | \lambda \cdot v \rangle &= |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Cons: esiste base ortonormale $u_1, \dots, u_n$ t.c. $A \cdot u_j = e^{i\alpha_j} \cdot u_j$
 $\alpha_j \in \mathbb{R}$.