Geometria 24/3/22

C-S + triang per $\langle\cdot|\cdot\rangle$ hermitiano

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w|v+w\rangle = \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \underbrace{\langle w|v\rangle}_{\overline{\langle v|w\rangle}} + \langle w|w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle v|w\rangle) + \|w\|^2$$

<u>Oss</u>: $\|\cdot\|$ <u>non</u> determina $\langle\cdot|\cdot\rangle$

C-S: $\quad \|\alpha v + w\|^2 \geq 0$

$$|\alpha|^2 \cdot \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha \cdot \langle v|w\rangle) + \|w\|^2 \geq 0$$

$$\alpha = t \cdot \frac{\overline{\langle v|w\rangle}}{|\langle v|w\rangle|}$$

$$t^2 \cdot \|v\|^2 + 2t \cdot |\langle v|w\rangle| + \|w\|^2 \geq 0$$

$$\Delta/4 \leq 0 \implies |\langle v|w\rangle|^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0 \qquad \ldots$$

Triang:
$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$
$$\leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$
$$\leq \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2.$$

9.4.1 (g) Esibire proiez. ortog. in $\mathbb{R}^4$ su

$$W = \operatorname{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{w_2} \right)$$

$(w_1, w_2) \rightsquigarrow (w_1, w_2')$ ortog

$$w_2' = \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}} - \frac{-2-6+3-5}{4+9+1+1} \cdot \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$2 + 0 + 11 - 13 = 0$ ✓

$$P_W \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{2a-3b+c-d}{\underbrace{4+9+1+1}_{\substack{15 \\ \shortparallel \\ 3\times 5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{a+11c+13d}{\underbrace{1+121+169}_{\substack{291 \\ \shortparallel \\ 3\times 97}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1455} \begin{pmatrix} 393 & -582 & 249 & * \\ -582 & 873 & * & * \\ 249 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{M}$$

$${}^tM = M \qquad M \cdot M = M$$

9.4.2. Trovare $X \in M_{2\times 2}$ autoaggiunte rispetto ad $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ + altre condiz.

$X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ autoaggiunte risp. a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$:

$$\langle X\cdot v \,|\, w\rangle_A = \langle v \,|\, X\cdot w\rangle_A \qquad \forall v,w$$

$$^t(X\cdot v)\cdot A\cdot w = {}^tv\cdot A\cdot(X\cdot w) \qquad \forall v,w$$

$$^tv\cdot \boxed{{}^tX\cdot A}\cdot w = {}^tv\cdot \boxed{A\cdot X}\cdot w \qquad \forall v,w$$

$$^tX\cdot A = A\cdot X$$

(a) $\quad A = \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{3a = 3a} \\ 2c = 3b \\ \cancel{3b = 2c} \\ \cancel{2d = 2d} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix}a&2t\\3t&c\end{pmatrix}$$

$\forall a,c,t\in\mathbb{R}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad tr(X) = 0, \ {}^tX = X$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{2a+b = 2a+b} \\ a+b = 2b-a \\ \cancel{2b-a = a+b} \\ \cancel{b-a = b-a} \end{cases} \qquad 2a = 3b$$

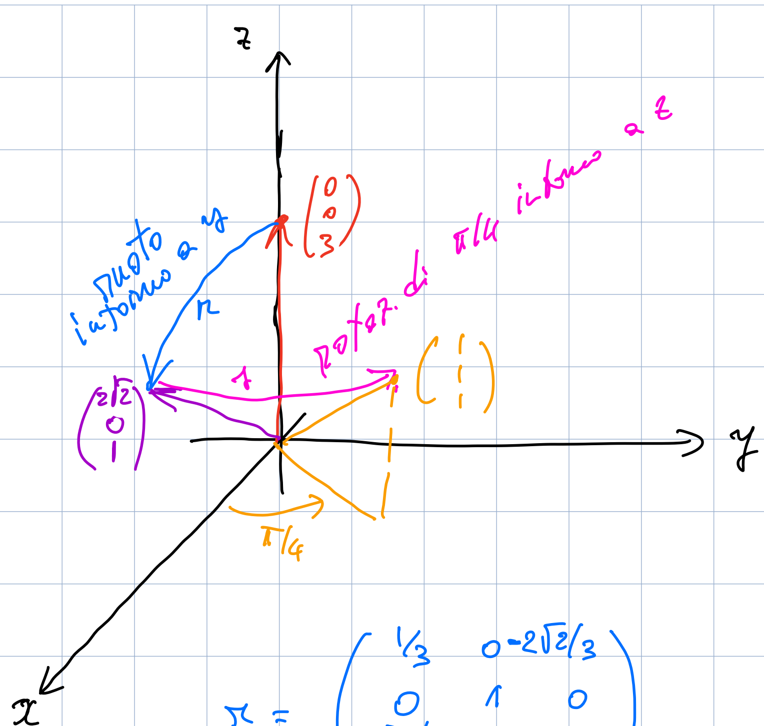
$$A = \begin{pmatrix} 3t & 2t \\ 2t & -3t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

9.4.3 (b) Esibire la matrice di una delle due rotazioni g di angolo $\pi/6$ in $\mathbb{R}^3$ intorno alla retta $l = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Idea: cerco una isometria k t.c. $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; se h è una rotaz. di $\pi/6$ intorno a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ho $g = k^{-1} \circ h \circ k$.

$$h = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 & 0 \\ \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerco k^{-1}:



$$k^{-1}: \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+0+0} = 3$$

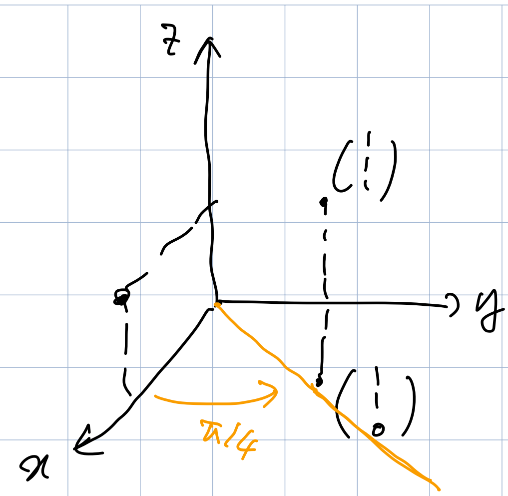
$$\left\| \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8+1} = 3$$

$$r = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$k^{-1} = s \circ r$$

$$g = s \circ r \circ h \circ \underbrace{r^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2}/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}} \circ s^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$x = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$3c = 1 \qquad c = 1/3$

Teo spettrale : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

A simm $\Longrightarrow$ A è diago tramite una matrice ortogonale, cioè $\exists M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e $M^{-1}\cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

cioè esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.

"spettrale" ...

Vale anche $\Leftarrow$: $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ diago, $M^{-1} = {}^tM$

$$\Rightarrow A = M \cdot D \cdot {}^tM$$
$$\Rightarrow {}^tA = {}^t({}^tM) \cdot {}^tD \cdot {}^tM$$
$$= M \cdot D \cdot {}^tM \quad \checkmark$$

Dimo: per induzione su n.

$n = 1 \qquad A = (\lambda_1) \qquad e_1 = (1)$

Passo induttivo: supponiamo vero per le matrici simm $(n-1) \times (n-1)$; prendiamo $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm.

Affermo che A ha almeno un autoval. reale.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset M_{n \times n}(\mathbb{C})$

dunque $p_A(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ ha radice $\lambda \in \mathbb{C}$

quindi A come matrice complessa ha autovalore λ

pertanto ha autovettore $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$:

$A \cdot z = \lambda \cdot z$. Calcolo:

$$\langle A \cdot z | z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z | A^* z \rangle = \langle z | {}^t\bar{A} \cdot z \rangle = \langle z | A z \rangle$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \langle z \overset{\|}{|} \lambda \cdot z \rangle$$
$$\langle \lambda \cdot z | z \rangle = \lambda \cdot \langle z | z \rangle = \lambda \cdot \|z\|^2 \qquad\qquad \overset{\|}{\bar{\lambda} \cdot \|z\|^2}$$

$\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Affermazione provata.

Prendo un autovettore u di λ unitario; lo completo a base $N = (u, u_2, \dots, u_n)$ ortonormale di $\mathbb{C}^n$.

Ho trovato N t.c. ${}^tN = N^{-1}$ e

$$N^{-1} \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} w \in \mathcal{M}_{1 \times (n-1)} \\ B \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)} \end{array}$$

Facile vedere: A simm, N ortog $\Longrightarrow N^{-1} \cdot A \cdot N$ simm (come sopra)

$\Longrightarrow$ $w = 0$ $\quad B$ simmetrica.

Per ipotesi induttiva $\exists P \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}$ ortog. t.c.

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \cdot N^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_{\substack{M \\ \text{ortogonale}}} = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Prop: se A è simm. la funzione

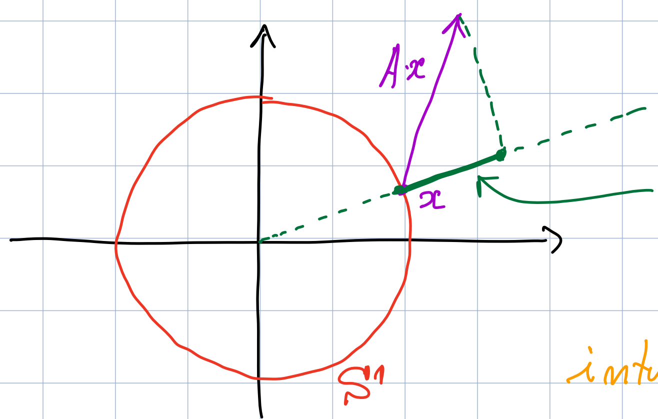
$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\langle x | x \rangle_A}{\| x \|^2}$$

ammette max. e min. ed essi sono autovalori di A;

inoltre i punti di max e min. sono relativi autovett.

Esaminiamo f su $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

$$f(x) = \langle x | x \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot x = \langle x \mid A \cdot x \rangle$$



$f(x)$ = componente nella direzione x della forza applicata a x

intuitivo che sia max quando $A \cdot x = \lambda \cdot x$

Visto: f continua su $[a,b]$ chiuso e limitato ammette max e min.

Oss 1: la $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{\langle x | x \rangle_A}{\|x\|^2}$

è costante sulle rette:

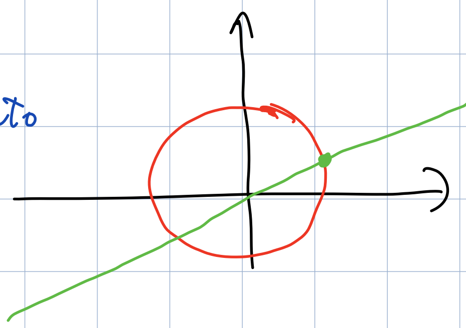
$$f(t \cdot x) = \frac{\langle t \cdot x \mid t x \rangle_A}{\|t \cdot x\|^2} = \frac{\cancel{t^2} \cdot \langle x \mid x \rangle_A}{\cancel{t^2} \cdot \|x\|^2}$$

Oss 2: i valori assunti sono quelli assunti su S^{n-1}

Fatto: S^{n-1} è chiuso e limitato

contiene tutti i suoi punti limite

non va a ∞



Fatto: f continua (anzi C^∞)

$\Longrightarrow$ come in una variabile si conclude che ha max/min.

Proviamo che se λ è max o min $\underbrace{\text{}}_{}$ per f e x è punto in cui è assunto allora $A \cdot x = \lambda \cdot x$.

So: $Jf(x) = 0$ cioè $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall k.$

$$f(x) = \frac{\langle x | x \rangle_A}{\|x\|^2} = \frac{{}^t x \cdot A \cdot x}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|^4} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_{ik} \right) \cdot \|x\|^2 - \langle x | x \rangle_A \cdot 2x_k \right)$$

uguali poiché A è simm

$$= \frac{1}{\|x\|^4} \left(2(A\cdot x)_k \cdot \|x\|^2 - \langle x|x\rangle_A \cdot 2x_k \right) = 0$$

$$\Rightarrow (A\cdot x)_k = \underbrace{\frac{\langle x|x\rangle_A}{\|x\|^2}}_{f(x) = \lambda} \cdot x_k$$

$$\Rightarrow \quad A\cdot x = \lambda \cdot x. \qquad \blacksquare$$

Teo: A simm $\Rightarrow \exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

Q: per quali A simm. la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.?

Risposta: $\Leftrightarrow$ A ha autoval pos.

Infatti: $\quad \langle x|x\rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \langle M\cdot x | M\cdot x\rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tx \cdot {}^tM\cdot A\cdot M\cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tx \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 .$$

Data A simm. chiamo A_k l'angolo $k \times k$ in alto a sinistra di A

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix}}^{A_2} & \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix} & \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$d_k = \det(A_k)$.

<u>Teo</u>: data A simm se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$ allora i segni degli autoval. di A coincidono con i segni di

$$d_1, \; d_2/d_1, \; d_3/d_2, \dots, d_n/d_{n-1}$$

<u>Cor</u>: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\iff d_1, \dots, d_n > 0$.