

Geometria 23/3/2022

V su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dico che $f: V \rightarrow V$ lin.
è autoaggiunta se $\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle$.

Oss: $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
è autoaggiunta rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} \iff M$ simm.

Fatti: autoaggiunta

$$\iff \langle M \cdot x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x | M \cdot y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$\iff {}^t(M \cdot x) \cdot y = {}^t x \cdot M \cdot y$$

$$\iff {}^t x \cdot {}^t M \cdot y = {}^t x \cdot M \cdot y$$

$$\iff {}^t x \cdot ({}^t M - M) \cdot y = 0$$

$$\iff {}^t M - M = 0$$

$$\iff {}^t M = M.$$

Prop: $p: V \rightarrow V$ è proiezz. ortogonale $\iff p \circ p = p$ e p è autoaggiunta

(Sappiamo: $p: V \rightarrow V$ proiezz risp. a $V = W \oplus Z$
 $\iff p \circ p = p$; allora $W = \text{Im}(p)$, $Z = \text{Ker}(p)$.)

Dico: $\Rightarrow$: sappiamo sia proiezz risp. a $V = W \oplus W^\perp$.

$$p \circ p = p \quad \checkmark$$

$$v_1, v_2 \in V$$

$$v_1 = w_1 + u_1$$

$$v_2 = w_2 + u_2$$

$$\langle p(v_1) | v_2 \rangle = \underbrace{\langle w_1 |}_{\substack{\uparrow \\ W}} \underbrace{w_2 + u_2}_{\substack{\uparrow \\ W^\perp}} = \underbrace{\langle w_1 | w_2 \rangle}_{\text{circled}} + 0$$

$$\langle v_1 | p(v_2) \rangle = \langle w_1 + u_1 | w_2 \rangle = \underbrace{\langle w_1 | w_2 \rangle}_{\substack{\text{in } W^\perp \\ W}} + 0$$

⇐ Supponiamo $p \circ p = p$ e p autoaggiunta.

Sappiamo che p è proiett. su W di $V = W \oplus \underbrace{\text{Ker}(p)}_{\text{Im}(p)}$

Devo vedere: $\text{Ker}(p) = W^\perp$.

Mostro $\text{Ker}(p) \subset W^\perp$: questo basta perché

se $\dim V = n$, $\dim W = k$ allora

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \dim(W^\perp) = n - k.$$

Prendo $z \in \text{Ker}(p)$; devo vedere che $z \in W^\perp$ cioè

$$\langle w | z \rangle = 0 \quad \forall w \in W.$$

$$w \in \text{Im}(p) \Rightarrow w = p(u) \Rightarrow p(w) = p(p(u)) = p(u) = w$$

$$\langle w | z \rangle = \langle p(w) | z \rangle = \langle w | p(z) \rangle = \langle w | 0 \rangle = 0. \quad \square$$

Cor: $M \in M_{n \times n}$ è proiett. ortog. $\Leftrightarrow M \cdot M = {}^t M = M$

Esempio: $\mathbb{R}^3$; $W: 2x - 3y + 5z = 0$.

$$\text{cioè } W = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}^\perp \quad \text{cioè } W^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Cerco P_W :

Strada 1: $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
 $v_1 \quad v_2$

ortonormalizzo $v_1, v_2 \leadsto w_1, w_2$; $P_W(u) = \langle u/w_1 \rangle \cdot w_1 + \langle u/w_2 \rangle \cdot w_2$

Strada 2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_{W^\perp} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{4+9+25} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2x - 3y + 5z}{38} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 6 & -10 \\ 6 & 29 & 15 \\ -10 & 15 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

M

$${}^t M = M \quad \checkmark$$

$$M \cdot M = M \quad \dots \text{ (esercizio)}$$

Def: dato V con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ chiamo $f: V \rightarrow V$ lin.
 ortogonale se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle \quad \forall v, w$
 cioè f preserva il prodotto scalare tra vettori.

Oss: $\tilde{f}$ equivale a chiedere
 $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v$

e anche chiedere che
 $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$

Diremo allora anche che f è isometria (preserva distanze).

Oss: $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è ortogonale
 $\Leftrightarrow {}^t M \cdot M = I_n$.

Yufatti: M ortog $\Leftrightarrow \langle M \cdot x, M \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$
 $\Leftrightarrow {}^t(M \cdot x) \cdot (M \cdot y) = {}^t x \cdot y \quad \forall x, y$
 $\Leftrightarrow {}^t x \cdot ({}^t M \cdot M) \cdot y = {}^t x \cdot I_n \cdot y \quad \forall x, y$
 $\Leftrightarrow {}^t x \cdot ({}^t M \cdot M - I_n) \cdot y = 0 \quad \forall x, y$
 $\Leftrightarrow {}^t M \cdot M = I_n$.

Oss: M è ortogonale $\Leftrightarrow$ colonne di M sono base ortonormale

non logico

Yufatti: se $M = (u_1, \dots, u_n)$

M ortog. $\Leftrightarrow {}^t M \cdot M = I_n$

$\Leftrightarrow {}^t(u_1, \dots, u_n) \cdot (u_1, \dots, u_n) = I_n$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ base ortonormale

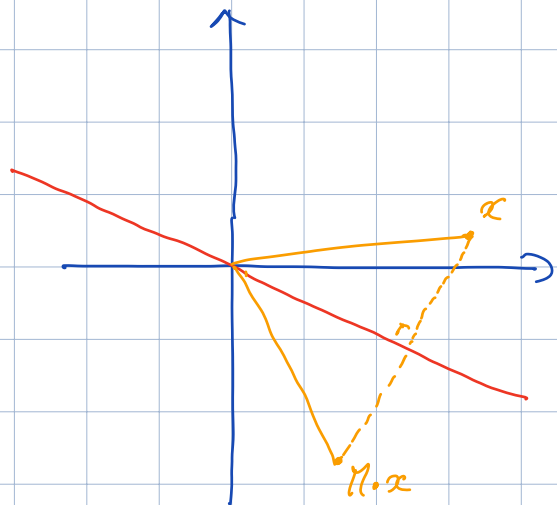
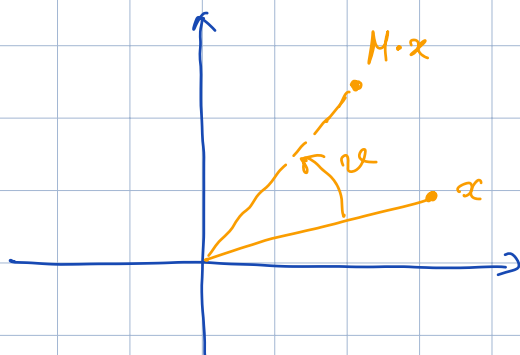
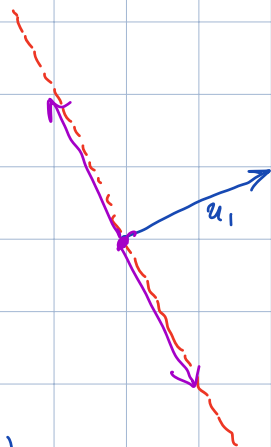
Esempi: $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} \cos(u) & x \\ \sin(u) & * \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix} \quad \text{rotazione} \quad (1)$$

esercizio

$$\begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ \sin(u) & -\cos(u) \end{pmatrix} \quad \text{riflessione} \quad (2)$$

rispetto a retta
esercizio



Esempi: $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rotazione intorno a retta (asse z)} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

riflessione rispetto a piano (piano xy)
(2)

$$\begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

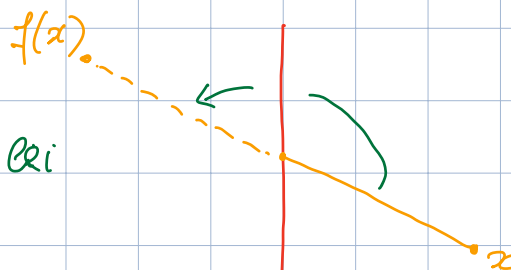
riflessione rispetto a piano P (piano xy)
composta rotazione intorno a $P^\perp$ (anzì)
non conta ordine
(3)

Fatto: le isometrie di $\mathbb{R}^3$, cioè le matrici 3×3 ortog.,
sono tutte di tipo (1), (2), (3) -

Oss: $I_3 =$ rotaz. di angolo 0

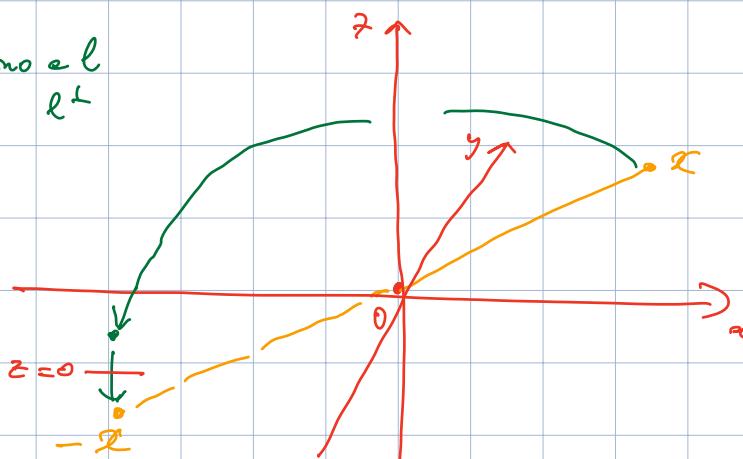
rifl. risp. a retta

= rotaz. di π intorno a $\mathbb{R}i$

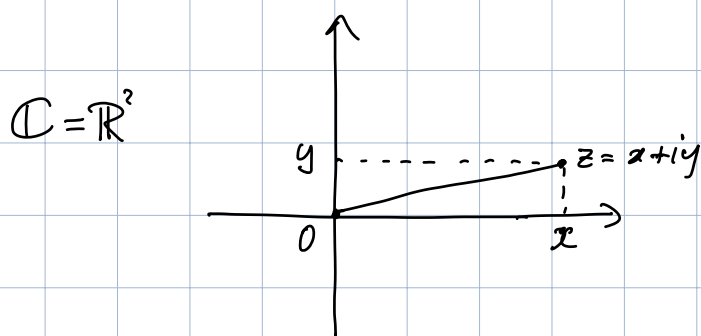


rifl. risp. a 0

= rotaz. di angolo π intorno a l
composta riflessione risp. a $l^\perp$



Caso complesso



$$d(z, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$$

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m} \quad d(z, 0) = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2} = \sqrt{\bar{z}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{z}_m \cdot z_m}$$

Chiamo prodotto scalare hermitiano standard su $\mathbb{C}^m$

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto \langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^m} \\ &= \bar{w}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{w}_m \cdot z_m \\ &= {}^t \bar{w} \cdot z = w^* \cdot z \end{aligned}$$

$$A \in M_{k \times m}(\mathbb{C}) ; \quad A^* = {}^t \bar{A} \in M_{m \times k}(\mathbb{C})$$

Fatto: è un caso particolare di:

Def: dato V sp. vet. su $\mathbb{C}$ chiamo $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

- sesquilineare (lin. a sin., antilin. a dx)

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 f(v_1, w) + \alpha_2 f(v_2, w)$$

$$f(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \overline{\alpha_1} \cdot f(v, w_1) + \overline{\alpha_2} \cdot f(v, w_2)$$

- hermitiana se $f(w, v) = \overline{f(v, w)}$

- def. pos. $\Leftrightarrow f(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0$.

Oss: (1) Sapendo f hermitiana basta chiedere lin. e sin. per avere antilin. a dx.

(2) Sapendo f hermitiana ho $f(v, v) \in \mathbb{R}$

(Per $\alpha \in \mathbb{C}$, " $\alpha > 0$ " non ha senso; in $\mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$)

Es: $C^0([0, 1], \mathbb{C})$

$$z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$$

x, y continue.

$$\langle z | w \rangle = \int_0^1 z(t) \cdot \overline{w(t)} \cdot dt$$

$$\begin{aligned} \langle z | z \rangle &= \int_0^1 z(t) \cdot \overline{z(t)} \cdot dt = \int_0^1 |z(t)|^2 \cdot dt \\ &= \int_0^1 (x(t)^2 + y(t)^2) \cdot dt \end{aligned}$$

Teoria: Tutta identica salvo ricordarsi che $\sin \neq dx$
e che i valori non sono reali:

Cauchy-Schwartz:

$$|\langle z|w \rangle| \leq \|z\| \cdot \|w\|$$

↑ modulo di numero complesso
[senza dimostrazione]

Triangolare

$$\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$$

Coordinate di v rispetto a base ortogonale $u_1, \dots, u_m$

$$v = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v|u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \cdot u_i$$

lineare in v

NO: $\langle u_i|v \rangle$

Proiezione ortog su W con base ortog $w_1, \dots, w_k$

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v|w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

lineare

Gram-Schmidt: $v_1, \dots, v_m \rightsquigarrow u_1, \dots, u_m$

$$u_1 = v_1 / \|v_1\|$$

$$\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \underbrace{\langle v_{k+1} / u_i \rangle}_{\substack{\text{NO} \\ \langle u_i / v_{k+1} \rangle}} \cdot u_i \quad u_{k+1} = \tilde{u}_{k+1} / \|\tilde{u}_{k+1}\|$$

linear

Visto: le bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono le $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$
 $(\langle x|y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ simm. $\Leftrightarrow A$ simm.

Def: data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ posso $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
 $\langle z|w \rangle_A = w^* \cdot A \cdot z$

Prop:
 • le sesquilineari su $\mathbb{C}^n$ sono esattamente le $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$
 • $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ hermitiana $\Leftrightarrow A^* = A$ (A hermitiana)

Dimo: $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ hermitiana:

$$\begin{aligned} \text{Sia } \langle \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 | w \rangle_A &= w^* \cdot A \cdot (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \\ &= \alpha_1 \cdot w^* \cdot A \cdot z_1 + \alpha_2 \cdot w^* \cdot A \cdot z_2 \\ &= \alpha_1 \langle z_1 | w \rangle_A + \alpha_2 \langle z_2 | w \rangle_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{dx}: \quad \langle z | \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle_A &= (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)^* \cdot A \cdot z \\
 &= (\overline{\alpha_1} \cdot w_1^* + \overline{\alpha_2} \cdot w_2^*) \cdot A \cdot z \\
 &= \overline{\alpha_1} \cdot \langle z | w_1 \rangle_A + \overline{\alpha_2} \cdot \langle z | w_2 \rangle_A
 \end{aligned}$$

Table con data f poupo $a_{kj} = f(e_j, e_k)$

$$f(z, w) = f\left(\sum_{j=1}^n z_j e_j, \sum_{k=1}^n w_k e_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{w_k} \cdot f(e_j, e_k) \cdot z_j$$

$$= \sum \sum \overline{w_k} \cdot a_{kj} \cdot z_j = w^* \cdot A \cdot z.$$

$\langle . | . \rangle_A$ hermitiana

$$\Leftrightarrow \langle w | z \rangle_A = \overline{\langle z | w \rangle_A}$$

$$\Leftrightarrow z^* \cdot A \cdot w = \overline{w^* \cdot A \cdot z}$$

$$\Leftrightarrow {}^t(z^* \cdot A \cdot w) = \overline{w^* \cdot A \cdot z}$$

$$\Leftrightarrow {}^t w \cdot {}^t A \cdot {}^t z^* = w^* \cdot A \cdot z$$

$$\Leftrightarrow w^* \cdot A^* \cdot z = w^* \cdot A \cdot z$$

$$\Leftrightarrow A^* = A.$$

Q : quali $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ hermitiane sono def. pos.?

Chiamo $f: V \rightarrow V$

- autoggettiva se $\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle$
- unitaria se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle$

Fatti : (1) p proiezz. ortog. $\Leftrightarrow p \circ p = p$ e autoggettiva

(2) $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è autoggettiva $\Leftrightarrow M$ hermitiana
($M^* = M$)

(3) $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è unitaria $\Leftrightarrow M^* \cdot M = I_n$
 $\Leftrightarrow$ colonne basi ortonormali

Ese : esibire la proiezz. ortog. di $\mathbb{C}^3$ su

$$W : (1+i)z_1 + 5i \cdot z_2 + 7 \cdot z_3 = 0,$$

$$\text{Oss : } W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1-i \\ -5i \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$P_W(z) = z - P_{W^\perp}(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{(1+i)z_1 + 5i \cdot z_2 + 7z_3}{1+1+25+49} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -5i \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 76z_1 \\ 76z_2 \\ 76z_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{76} \begin{pmatrix} ((1+i)z_1 + 5i \cdot z_2 + 7z_3) \cdot (1-i) \\ \vdots \\ (-5i) \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 76z_1 - 2z_1 + (5+5i)z_2 + (7-7i)z_3 \\ 76z_2 + (5-5i)z_1 + 25z_2 - 35z_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 74 & 5+5i & 7-7i \\ 5-5i & 101 & -35 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$


 M

$M^* = M$: sulle diag valori reali
 fuori diag corrisp. coniugati fra loro.