

Geometria 16/3/22

G-S: $v_1, \dots, v_m$ base $\longrightarrow u_1, \dots, u_m$ base ortonormale

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i, \quad u_{k+1} = \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}$$

Teo: funzione.

Dimo: Per induzione finita su $k=1, \dots, m$ provo che:

1. $u_1, \dots, u_k$ si possono costruire
2. sono ortonormali.
3. $\text{Span}(u_1, \dots, u_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Basta: $k=m$, sono ortonormali (e per questo) $\Rightarrow$ base
non nulli e sono m

$$\begin{array}{lll} k=1 & 1. & u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad v_1 \neq 0 \quad \checkmark \\ & 2. & \|u_1\| = 1 \quad \checkmark \\ & 3. & \checkmark \end{array}$$

k qualsiasi: 1. $u_1, \dots, u_{k-1}$ ok per passo prec. 1
 u_k ok perché per passo prec. 3 ho
 $\text{Span}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$
 dunque $v_k \notin \text{Span}(u_1, \dots, u_{k-1})$
 $\Rightarrow \tilde{u}_k \neq 0 \Rightarrow \text{ok}.$

2. $u_1, \dots, u_{k-1}$ ok passo 1 prec.
 Basta vedere che $\tilde{u}_k \perp u_j \quad \forall j \leq k-1$;
 u_k unitario perché $u_k = \tilde{u}_k / \|\tilde{u}_k\|$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_k | u_j \rangle &= \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | u_i \rangle \cdot u_i \mid u_j \right\rangle \\ &= \langle v_k | u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | u_i \rangle \cdot \langle u_i | u_j \rangle \end{aligned}$$

$\begin{matrix} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{matrix}$

$$= \langle v_k | u_j \rangle - \langle v_k | u_j \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} 3. \text{Span}(u_1, \dots, u_k) &= \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}, u_k) \\ &= \text{Span}\left(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | u_i \rangle u_i}_{\text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})}\right) \\ &= \text{Span}(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

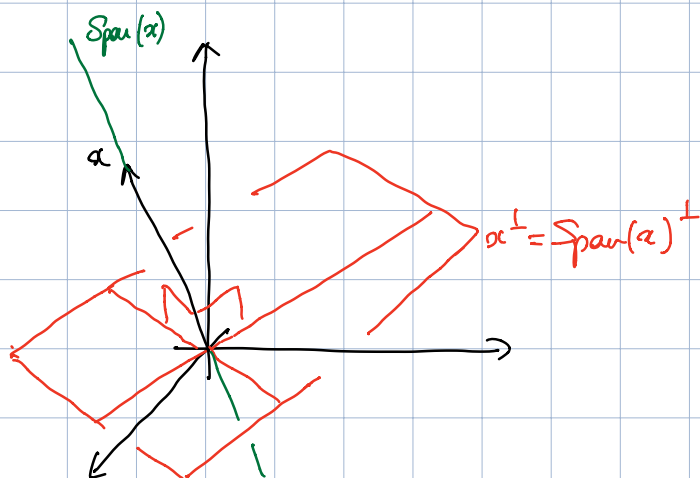
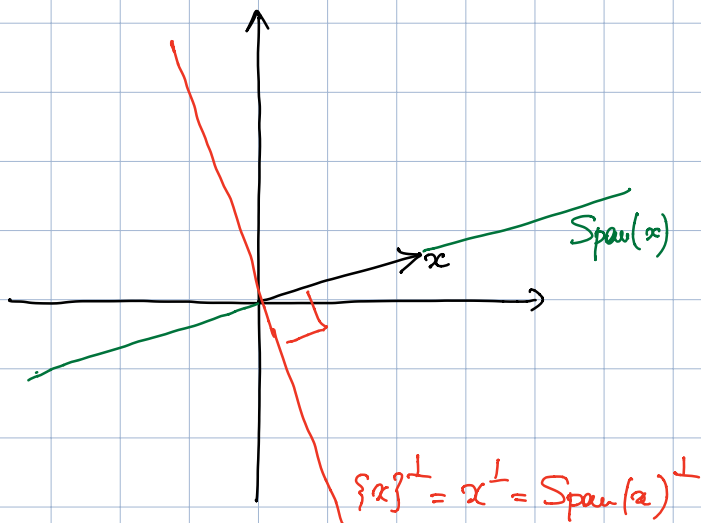


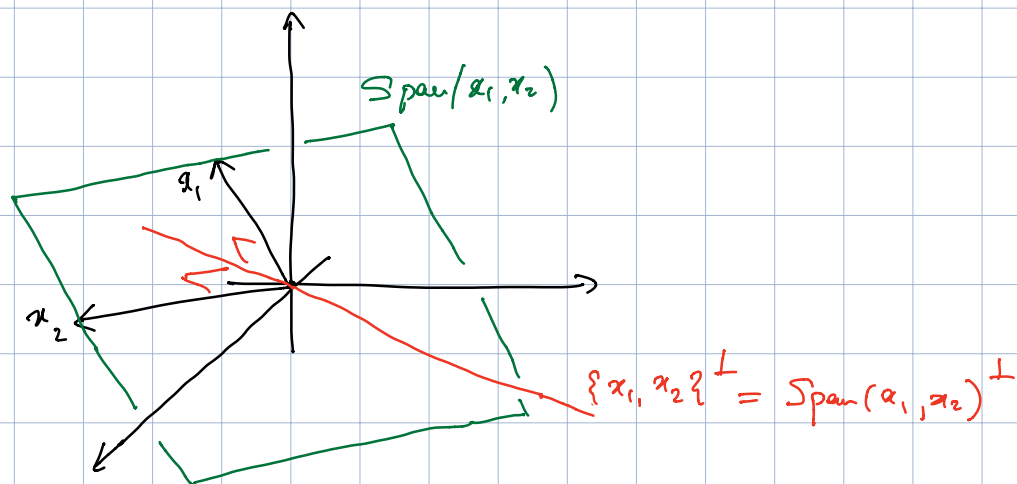
Oss: la matrice di cambio di base è:

$$\begin{pmatrix} >0 & * & * \\ 0 & >0 & * \\ 0 & 0 & >0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def: Se $X \subset V$ é um subespaço

$$X^\perp = \{v \in V : \langle v, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X\}$$





Prop: • $X^\perp$ è sottosp. vet. di V
 • $X^\perp = \text{Span}(X)^\perp$

(Dimo: esercizio)

Prop: se $\dim(V) < +\infty$ e $W \subset V$ è sottosp. ho
 $V = W \oplus W^\perp$

Dimo: prendo una base $w_1, \dots, w_k$ di W

Grazie a G-S posso supporre ortonormale.

Completo $w_1, \dots, w_k$ a caso $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$

e applico G-S ottenendo

$\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{base di } W}, w_{k+1}, \dots, w_n$ base ortogon. di V

Affermo che $W^\perp = \text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_m)$: ciò basta.

$\supset$: preso $z \in \text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_m)$ devo vedere che
 $\langle w | z \rangle = 0 \quad \forall w \in W$. Infatti.

$$z = \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_m w_m$$

$$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$$

$$\langle w | z \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^m \alpha_i \cdot \beta_j \cdot \underbrace{\langle w_i | w_j \rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{poiché } i < j}} \quad \underline{OK}$$

$\supset$: preso $z \in W^\perp$ devo vedere che $z \in \text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_m)$

Poiché $w_1, \dots, w_m$ è base ho

$$z = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m.$$

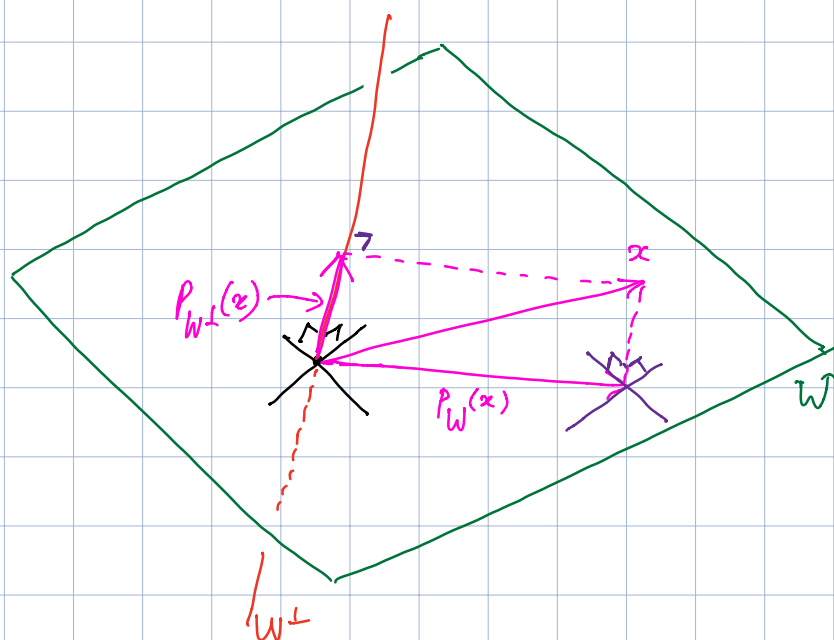
Ma per $i \leq k$ ho $w_i \in W$ dunque

$$0 = \langle w_i | z \rangle = \langle w_i | \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_i w_i + \dots + \alpha_m w_m \rangle \\ = \alpha_i$$

Cioè $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ dunque

$$z = \alpha_{k+1} w_{k+1} + \dots + \alpha_m w_m. \quad \square$$

Def: dato $W \subset V$ spg. chiamo proiezione ortogonale su W quella su W associata alla $V = W \oplus W^\perp$



Prop: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortogonale di W ho

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

Dimo: posso completare a base $w_1, \dots, w_m$ ortop. di V .

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i}_W + \underbrace{\sum_{i=k+1}^m \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i}_{\substack{\text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_m) \\ \parallel \\ W^\perp}}$$

Corr: $\sum_{i=1}^k \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \leq \|v\|^2$ (Bessel) ▣

Yufath:

$$v = p_W(v) + p_{W^\perp}(v)$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \|p_W(v)\|^2 + 2 \underbrace{\langle p_W(v) | p_{W^\perp}(v) \rangle}_0 + \underbrace{\|p_{W^\perp}(v)\|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|p_W(v)\|^2$$

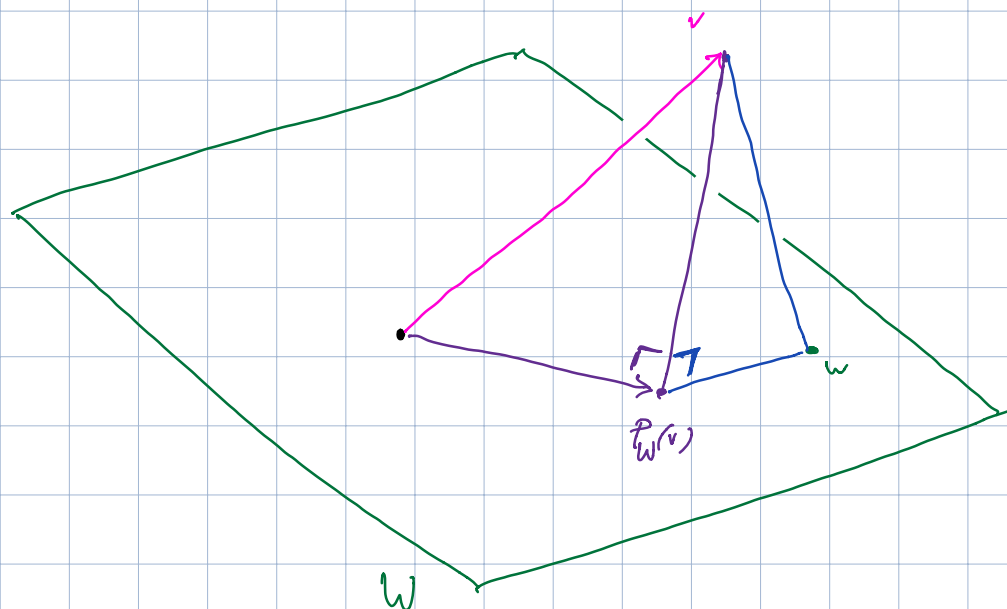
$$= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\langle v | w_i \rangle \cdot \langle v | w_j \rangle}{\|w_i\|^2 \cdot \|w_j\|^2} \cdot \underbrace{\langle w_i | w_j \rangle}_0$$

$$\frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^4} \cdot \|w_i\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \quad \square$$

Prop: dato V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $W \subset V$ ssp. ho che $p_W(v)$ è il punto di W più vicino a v .



$$d(w, v) \geq d(p_W(v), v)$$

Tra tutti i punti di W la proiezione ortog. di v su W è il punto più vicino a v .

————— o —————

Richiamo di analisi: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2
(esistono f', f'' continue)

$$x \in (a, b) \Rightarrow f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + \frac{1}{2} f''(x) \cdot t^2 + o(t^2)$$

- Se x è pto. di max/min locale per f allora
 $f'(x) = 0$ e $f''(x) \leq 0 / f''(x) \geq 0$

qualcosa che
tende a 0 più
velocemente di t^2
per $t \rightarrow 0$.



- Se x è l.c. $f'(x)=0$ e $f''(x)<0$ / $f''(x)>0$ allora x è punto di massimo loc.

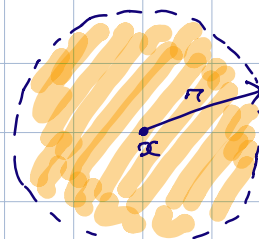
Idea: fare lo stesso in più variabili.

$$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

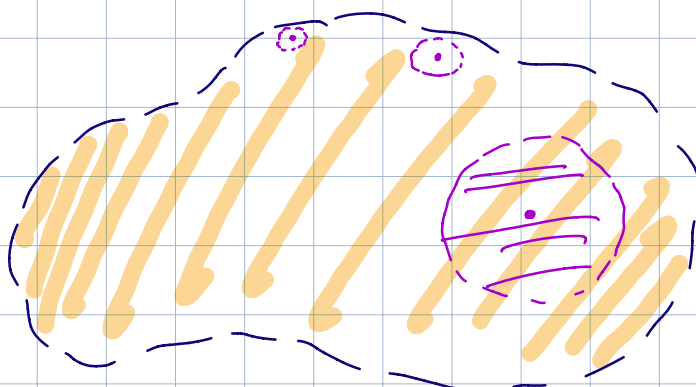


Notazione: dato $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$$



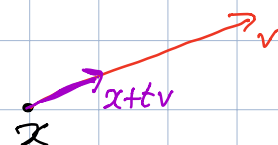
Def: dico che $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall x \in A$
 $\exists r > 0$ l.c. $B(x,r) \subset A$.



Cioè: A è aperto se per ogni x in A posso spostarmi da x in ogni direzione almeno di poco restando dentro A .

Def: dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$
 e data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 chiamo derivata direzionale di f in direz v .

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}$$



Chiamo inoltre derivata parziale i-esima di f in x

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t} \\ &= \text{derivata di } f \text{ rispetto a } x_i \text{ considerando} \\ &\quad \text{fisse tutte le altre coordinate.} \end{aligned}$$

Es: $f(x, y) = x^5 y^2 \cos(7x^2 y^3)$

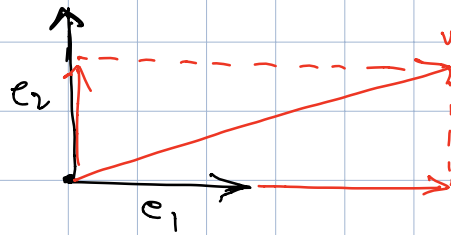
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 y^2 \cos(7x^2 y^3) + x^5 y^2 \cdot (-\sin(7x^2 y^3)) \cdot 14xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^5 y \cos(\dots) + x^5 y^2 \cdot (-\sin(\dots)) \cdot 21x^2 y^2$$

Fatto: se f è decante ho $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i$

Pougo $Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right)$

(matrice jacobiana)



Dunque $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \underbrace{Jf(x)}_{1 \times m} \cdot \underbrace{v}_{m \times 1}$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ pougo

$Jf(x) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

$(Jf(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

Es: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 y^2 \\ \sin(5x^4 + 7y^6) \end{pmatrix}$

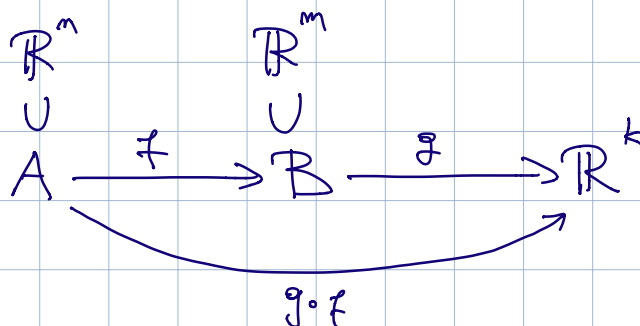
$(Jf)(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 & 2x^3 y \\ \cos(\dots) \cdot 20x^3 & \cos(\dots) \cdot 42y^5 \end{pmatrix}$

Derivazione funzioni composte:

$(a, b) \xrightarrow{f} (c, d) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Estensione:



$$\underbrace{J(g \circ f)(x)}_{k \times m} = \underbrace{Jg(f(x))}_{k \times m} \cdot \underbrace{Jf(x)}_{m \times m}$$

Def: chiamo derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right)(x)$$

Es: $f(x, y) = x^4 \cdot y^7$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^4 y^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y^7$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 28x^3 y^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 28x^3 y^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 42x^4 y^5$$

Fatto: Se f è decaute allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.