Geometria 10/3/22 ~ I

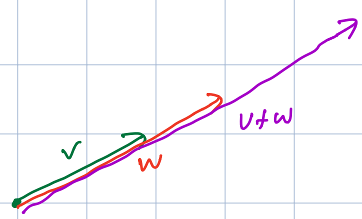
V su $\mathbb{R}$ con $\langle . | . \rangle$

$|\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

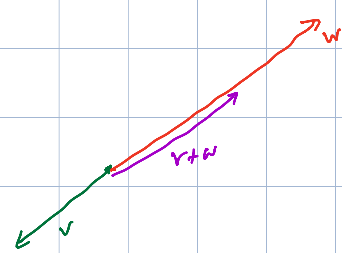
Teo: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ disug. triang.

uguaglianza $\iff$ uno dei due è multiplo non neg. dell'altro.

Dim: caso multipli:



non neg.



neg.

caso non multipli:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$
$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$$
$$= \left(\|v\| + \|w\|\right)^2. \qquad \blacksquare$$

Def: chiamo distanza associata a $\langle . | . \rangle$ la $d: V \times V \to \mathbb{R}$

$d(v,w) = \|v-w\|$.

Proprietà:

(1) $d(v,w) \geq 0$, nulla solo se $v = w$

(2) $d(v,w) = d(w,v)$

(3) $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$ uguaglianza vale solo se $u \in$ segmento di estremi v,w.

Infatti: $d(v,w) = \|v-w\| = \|(v-u)+(u-w)\|$

$$\leq \|v-u\| + \|u-w\|$$

$$\leq d(v,u) + d(u,w)$$

Def: dico che v è perpendicolare/ortogonale a w, $v \perp w$ se $\langle v|w\rangle = 0$; dico v unitario se $\|v\| = 1$.

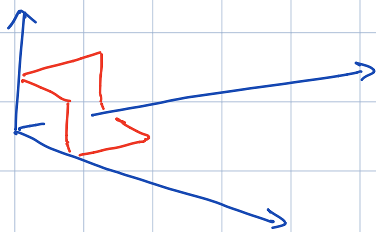
Prop: se $v_1, \dots, v_k$ sono ortog. fra loro e non nulli allora sono lin. indip.

Dim: siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$;

$$0 = \langle 0|v_j\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k | v_j\rangle$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1|v_j\rangle}_{=0} + \dots + \alpha_j \underbrace{\langle v_j|v_j\rangle}_{\|v_j\|^2 \neq 0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k|v_j\rangle}_{=0}$$

$\Longrightarrow \alpha_j = 0$. ∎



Teo: se $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ sono base ortogonale di V allora $\forall v \in V$ si ha

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot v_j .$$

Cioè $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v|v_1\rangle / \|v_1\|^2 \\ \vdots \\ \langle v|v_n\rangle / \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$.

In particolare:
- $[v]_{\mathcal{B}}$ richiede calcolo, no sistema
- la coord. j-esima dipende solo da v_j.

Esempio: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $v = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \dots$

risolvere α, β, γ

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} (\dots) (\dots) \right)$

$[v]_{\mathcal{B}'}$ = rifare sistema e α cambia

Invece: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \right)$

$v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (10-1-14)/(4+1+49) \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ ← rimane uguale per $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \cdots, \cdots \right)$ ortog.

Dimo: affermo che se $\langle u | v_j \rangle = 0 \ \forall j$ allora $u = 0$.

Infatti: $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$; ora

$$0 = \langle u | v_j \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v_1 | v_j \rangle}_{0} + \cdots + \alpha_j \underbrace{\langle v_j | v_j \rangle}_{\neq 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n | v_j \rangle}_{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow u = 0.$$

Per concludere posto $u = v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot v_j$

basta vedere che $\langle u | v_k \rangle = 0 \ \forall k$. Infatti:

$$\langle u | v_k \rangle = \left\langle v - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot v_j \,\middle|\, v_k \right\rangle$$

$$= \langle v | v_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_j | v_k \rangle}_{\text{nullo per } j \neq k}$$

$$= \langle v | v_k \rangle - \cancel{\frac{\langle v | v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot \langle v_k | v_k \rangle} = 0. \quad \blacksquare$$

Q : come trovare basi ortogonali?

Def: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ si dice ortonormale se è ortogonale e ogni v_j è unitario, cioè

$$\langle v_j | v_k \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

Prop: dato $(v_1, \dots, v_n)$ base di V si ottiene $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di V tramite:

- $u_1 = v_1 / \|v_1\|$
- costruiti $u_1, \dots, u_k$

$$\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_j \rangle \cdot u_j$$

$$u_{k+1} = \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}.$$

Esempio: $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+9}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{8-1-15}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ -23 \end{pmatrix}$$

verifico: $72-3-69=0$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{36^2+3^2+23^2}} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| u_1 \right\rangle \cdot u_1 + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| u_2 \right\rangle \cdot u_2 \right)$$