Geometria 3/3/22

$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad S_n = \{A : {}^tA = A\}$

$\qquad\qquad\qquad A_n = \{A : {}^tA = -A\}$

$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$ infatti

$S_n \cap A_n = \{0\}$

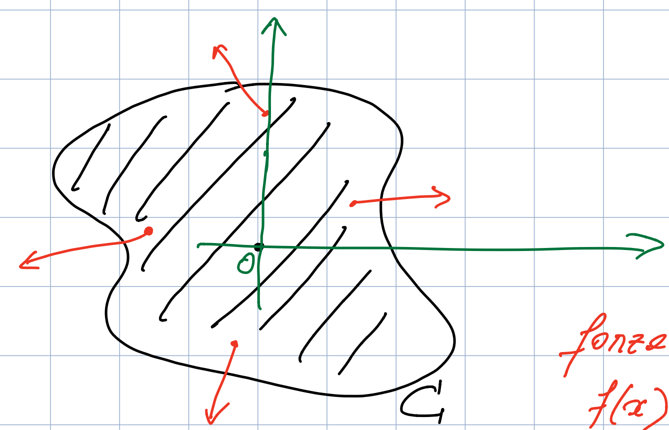
$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\text{simm}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\text{antisimm}}$$

<u>Es</u>: verificare Grassmann

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \; .$$

______ 0 ______

Corpo materiale in equilibrio soggetto a forze:



$G \subset \mathbb{R}^3$

forze agenti su $x \in G$

$f(x) \in \mathbb{R}^3$; $f(0) = 0$.

1-dim: $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \cong f'(0)\cdot x$ con x piccolo

approx lineare

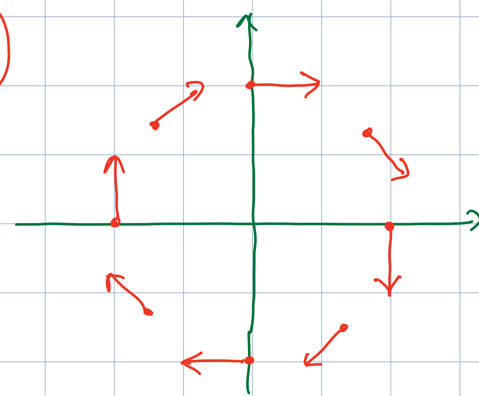
Anche in 3D: $f(x) \cong T \cdot x \qquad T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Scrivo $T = S + A \qquad S$ simm $\quad A$ antisimm

Fatto: A è responsabile di un movimento rigido

in 2D: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Analisi dell'azione di S. Esempio

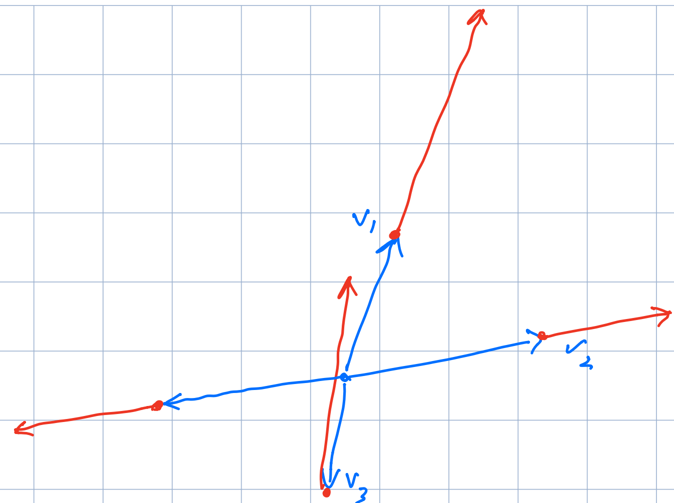
$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -2 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Fatto: posti $\boxed{v_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}} \quad v_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -6 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

accade che $S \cdot v_1 = 3 v_1 \qquad S \cdot v_2 = v_2 \qquad S v_3 = -2 v_3$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -2 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \end{pmatrix} = 3 \cdot \boxed{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}} \quad \text{(crediamoci)}$$



Qualora i vettori v_1, v_2, v_3 sono ortogonali fra loro e unitari: sistema di riferimento cartesiano monometrico.

V sp. vett. su $\mathbb{K}$.

Data applicazione lineare $f: V \to V$ è auspicabile per capire come agisce f trovare base $\mathcal{B}$ di V t.c. $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$, ovvero

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se tale $\mathcal{B}$ esiste, f è detta diagonalizzabile.

Prop: se $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$ è una matrice di f, le altre sono tutte e sole le sue coniugate [simili]: $A = M^{-1} \cdot A \cdot M$ con $M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile.

Dim: se $\mathcal{B}$ è altra base e M è la matrice di cambio da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ allora $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot M$.
Viceversa data M prendo $\mathcal{B}$ t.c. la matr. di cambio sia M. ▨

Problema diagonalizzazione :

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ pensata come $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

cerco M t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diago

$f : V \to V$, scelgo $\mathcal{B}$ a caso, pongo $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$M = (v_1, \dots, v_n)$ è la base che cerco (se c'è)

__Def__: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f se esiste $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$. Ogni tale v è detto autovett. di f. rel. a λ.

__Prop__: data $g : V \to V$ è ben def. $\det(g) = \det\left([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$ con $\mathcal{B}$ base di V, cioè esso è indip. da $\mathcal{B}$.

__Dim__: se $\mathcal{B}'$ è altra base e M è matr. di cambio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ so che $[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$. Dunque

$$\det\left([g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right) \overset{\text{Binet}}{=} \underbrace{\det(M^{-1})}_{= \cancel{\frac{1}{\det(M)}}} \cdot \det\left([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \cdot \cancel{\det(M)}.$$

$\blacksquare$

__Attenzione__: data $g : V \to V$ guardiamo sempre $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, NON $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ __POCO SIGNIFIC.__

Prop: data $f: V \to V$ posto

$$p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f) \quad \text{con } t \text{ indeterminata}$$

ho che $p_f(t)$ è un polinomio monico di grado n in t.

Dim: $p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$

qualcuno usa $p_f(t) = \det(f - t \cdot id_V)$

$$= \det\left([t \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \det\left(t \cdot [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \det(t \cdot I_n - A) = \det\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & \cdots & & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (t-a_{11}) \det\begin{pmatrix} t-a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ * & & t-a_{nn} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \det(\text{una matrice in cui } t \text{ compare } n-2 \text{ volte})$$

....

$$= (t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn}) + \text{polinomio di grado} \leq n-2$$

$$= t^n \underbrace{- (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})}_{-tr(A)} t^{n-1} + \text{polinomio di grado} \leq n-2.$$

$\blacksquare$

Prop: data $g: V \to V$ è ben def. $tr(g)$ come $tr\left([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$.

Lem: $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$, $B \in \mathcal{M}_{k \times n} \Rightarrow tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

Dim: $\operatorname{tr}(\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times m}{B}) = \sum_{i=1}^{m} (A\cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} (A)_{ij}\cdot(B)_{ji}$

$\operatorname{tr}(\underset{k\times m}{B}\cdot\underset{m\times k}{A}) = \sum_{j=1}^{k} (B\cdot A)_{jj} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} (B)_{ji}\cdot(A)_{ij}.$

$\blacksquare$

Dim (Prop): data $\mathcal{B}'$ ho $[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1}\cdot[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot M$.

$$\operatorname{tr}([g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}) = \operatorname{tr}\Big(\underbrace{M^{-1}}\cdot\underbrace{\big([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot M\big)}\Big)$$

uso lemma

$$= \operatorname{tr}\big([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot\underbrace{M\cdot M^{-1}}_{I_m}\big) = \operatorname{tr}([g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}).$$

$\blacksquare$

Esercizio: trovare $A, B, C \in M_{2\times 2}$ t.c.

$$\operatorname{tr}(A\cdot B\cdot C) \neq \operatorname{tr}(A\cdot C\cdot B)$$

$\operatorname{tr}(A\cdot B\cdot C) = \operatorname{tr}(C\cdot A\cdot B) = \operatorname{tr}(B\cdot C\cdot A)$

$\operatorname{tr}(A\cdot C\cdot B) = \operatorname{tr}(C\cdot B\cdot A) = \operatorname{tr}(B\cdot A\cdot C)$

Prop: $p_f(t) = \det(t\cdot \mathrm{id}_V - f)$
$= t^m - \operatorname{tr}(f)\cdot t^{m-1} + \cdots + (-1)^m\cdot\det(f).$

Dimo: t^n ✓ $\quad t^{n-1}$ ✓

t^0 : $p_f(0) = \det(-f) = \det(-[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$

$= (-1)^n \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = (-1)\det(f).$ ▨

Def: $p_f(t)$ è detto polinomio caratteristico di f.

Prop: λ è autoval. di $f \iff \lambda$ è radice di $p_f(t)$.

NON è la def di autovalore

Dimo: λ autoval $\iff \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\iff \exists v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$\iff \exists v \neq 0$ t.c $(\lambda \cdot id_V - f)(v) = 0$

$\iff \lambda \cdot id_V - f$ non invertibile

$\iff \det(\lambda \cdot id_V - f) = 0$

$\iff p_f(\lambda) = 0.$ ▨

Prop 1 (condiz. nec.): se f è diagonalizzabile allora $p_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{K}$ contate con molteplicità

[Sempre vero su $\mathbb{C}$]

Dimo: $\exists \mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$p_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n).$$ ▨

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad \alpha \neq 0$

$p_A(t) = t^2 + \alpha^2$ non ha radici in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ non diago su $\mathbb{R}$.

Prop 2 (condiz. suff.) : se $p_f(t)$ ha n radici in K distinte allora f è diagonalizzabile.

Dim: chiamiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici di $p_f(t)$.
So che sono autovalori, prendo relativi autovettori $v_1, \dots, v_n$ (non nulli). Se provo che sono base OK. Verifico che sono lin. indip.. Verifico per induzione (finita) su $k = 1, \dots, n$ che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

passo base $k = 1$: $v_1 \neq 0$ ✓

passo induttivo : supponiamo $v_1, \dots, v_k$ lin. indip ($k < n$) e dimostriamo che lo sono $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$.

Prendiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ t.c.

(*) $\quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$.

applico f a (*) : $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_k \cdot v_k + \cancel{\alpha_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} \cdot v_{k+1}} = 0$

moltiplico (*) per λ_{k+1} : $\lambda_{k+1} \cdot \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_{k+1} \cdot \alpha_k \cdot v_k + \cancel{\lambda_{k+1} \cdot \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1}} = 0$

sottraggo: $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})v_1+\dots+\alpha_k\cdot(\lambda_k-\lambda_{k+1})v_k=0$

Per ip. induttiva $v_1,\dots,v_k$ sono lin. indip. dunque

$$\alpha_1\cdot\underbrace{(\lambda_1-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}=\dots=\alpha_k\cdot\underbrace{(\lambda_k-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}=0$$

per ipotesi di radici distinte ,,

$\Longrightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_k=0$. Sostituendo in $(*)$

$\alpha_{k+1}\cdot v_{k+1}=0 \Longrightarrow \alpha_{k+1}=0.$

Ho verificato che tutti i coeff. in $(*)$ sono 0. $\blacksquare$

Def: se λ è autoval. di f. chiamo

- molt. algebrica di λ la sua molteplicità come radice di $p_f(t)$
- molt. geom. $\dim \operatorname{Ker}(\lambda\cdot id_V - f)$.

Oss: • $m.a.(\lambda)=k$ se $p_f(t)=(t-\lambda)^k\cdot q(t)$ con $q(\lambda)\neq 0$.

- $m.g.(\lambda)\geq 1$ poiché $\exists v\neq 0$ t.c. $v\in \operatorname{Ker}(\lambda\cdot id_V-f)$
- $m.g.(\lambda)\leq m.a.(\lambda)$. Se $v_1,\dots,v_h$ base di $\operatorname{Ker}(\lambda\cdot id_V-f)$ la completo a $v_1,\dots,v_h,v_{h+1},\dots,v_n$ base $\mathcal{B}$ di V e ho

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}=\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{matrix} & * \\ \hline \underbrace{\quad 0 \quad}_{h} & *\end{array}\right)\Big\}h$$

$$\Rightarrow p_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} t-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda \end{matrix} & * \\ \hline \underbrace{\quad 0 \quad}_{h} & t \cdot I_{n-h} - C \end{array} \right) \Big\} h$$

$$= (t-\lambda)^h \cdot \det(t \cdot I_{n-h} - C)$$

$$\Rightarrow m.a.(\lambda) \geq h.$$

Teorema: $f: V \to V$, con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ è diagonalizzabile se e solo se $p_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{K}$ contate con molt. e per ciascuna m.g. = m.a.

Invito: provare ese par. 10.1
(in part 10.1.10 (l), (m), (o), (p)).
e precedenti.

—— o ——

Esercizio: posto $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + 3z = 0 \right\}$
$Z = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

verificare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$, esibire le matrici delle proiezioni su W e Z e verificarne le proprietà.
$\dim(W) = 2$, $\dim(Z) = 1$; se $W \cap Z = \{0\}$ ho $W + Z = \mathbb{R}^3$
e dunque $W \oplus Z = \mathbb{R}^3$: infatti $2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 3 \neq 0$.

Dato $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ devo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{w} + \underset{\substack{\Uparrow \\ Z}}{u}$$

soddisfa l'equazione di W

cioè $u = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

cioè voglio che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ soddisfi l'equaz:

$$2(x+2t) - 5\cdot(y-t) + 3(z-4t) = 0$$

$$t = \frac{1}{3}(2x - 5y + 3z)$$

$$p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(2x-5y+3z)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overbrace{\begin{pmatrix} 7 & -10 & 6 \\ -2 & 8 & -3 \\ -8 & 20 & -9 \end{pmatrix}}^{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2x-5y+3z)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$P \cdot P = P \qquad Q \cdot Q = Q \qquad P \cdot Q = Q \cdot P = 0 \qquad Q + P = I_3$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 6 \\ -2 & 8 & -3 \\ -8 & 20 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 6 \\ -2 & 8 & -3 \\ -8 & 20 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 49+20-48 & -70-80+120 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -10 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$