Geometria 2/3/2022

Campo: $\mathbb{K}$ due operaz. interne (binarie) $+, \cdot$

$\exists$ neutro $(0, 1)$ $\quad$ $\exists$ opposto inverso $\neq 0$

assoc. $\quad$ comm. $\quad$ distrib.

Esempi: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Spazio vett. su $\mathbb{K}$ è insieme V con due operaz:

$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V \qquad$ t.c.

$+$: $\exists$ neutro 0, $\exists$ opposto, assoc. commut.

$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \quad (\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

$1 \cdot v = v$

Base: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ lin. indip. e generano

$\Rightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$;

chiamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$

indicato $[v]_{\mathcal{B}}$.

Se V ha basi si dice di dimensione finita e

<u>FATTO</u>: tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi

<u>DEF</u>: lo chiamo $\dim(V)$

($\mathbb{K}[t]$ = "polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ nelle indet. t" non ha basi)

Se $\dim_K(V) = n$

- se ho $w_1, \dots, w_k$ lin. indip. allora $k \leq n$ e posso completarli a base
- se ho $w_1, \dots, w_k$ che generano allora $k \geq n$ e posso estrarne una base (algoritmicamente)

$W \subset V$ è $\underbrace{\text{sottosp.}}^{\text{vettoriale}}$ se è chiuso rispetto alle operaz:

$0 \in W$

$w_1, w_2 \in W \implies w_1 + w_2 \in W$

$\lambda \in \mathbb{K},\ w \in W \implies \lambda \cdot w \in W$

W, Z sottosp. vett. di $V \implies W \cap Z$ è sottosp.

$W + Z = \mathrm{Span}(W \cup Z)$ = il più piccolo sottosp. che contiene $W \cup Z$

sottospazio generato

Grassmann: $\dim(W \cap Z) + \dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z)$

V, W sp. vett. ; $f: V \to W$ lineare se

$f(0) = 0$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} \in \mathbb{K}$

Notazione : $(A)_{ij} = a_{ij}$

Es: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e & -\pi \\ 7 & 41 & \sqrt{33} \end{pmatrix}$

$(A)_{23} = \sqrt{33} \qquad (A)_{12} = e$

Prodotto righe x colonne

$A \in M_{m \times n}, \; B \in M_{n \times k}, \; A \cdot B \in M_{m \times k}$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

FATTO: lineare in ciascun argomento fissato l'altro:

$A \cdot (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 A \cdot B_1 + \lambda_2 A \cdot B_2$ (lin a dx)

$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 \cdot B$ (lin a sin)

Conseguenza: se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ posso associarle una applicazione lineare

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

indicata sempre con A.

Se $f: V \to W$ è lineare e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ è base di W

chiamo matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ in part e $\mathcal{C}$ in arrivo la matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ data da $A = (a_{ij})$ t.c.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$$

cioè: nella colonna j di A stanno le coord. rispetto alla base in arrivo dell'immagine tramite l'appl del j-esimo elemento della base in partenza.

La indico con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

<u>Fatti</u>: • $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ $*$

• $[f \circ g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{C}}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_{m \times n}}"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$[f(v)]_{\mathcal{C}}$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

- $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$\left[\text{“}A \text{ come applicazione”} \right]^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{E}_n} = A$$

$$\mathcal{E}_n = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{canonica di } \mathbb{K}^n$$

V sp. vett, $W, Z \subset V$ sottosp; diciamo $V = W \oplus Z$ ("somma diretta") se $W \cap Z = \{0\}$ e $W + Z = V$.

<u>Prop</u>: se $V = W \oplus Z$ allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \underset{\overset{\cap}{W}}{w} + \underset{\overset{\cap}{Z}}{z}$.

<u>Dimo</u>: esistenza: sì perché $W + Z = \{w + z : w \in W, z \in Z\}$.
unicità: supponiamo $v = \underset{\overset{\cap}{W}}{w_1} + \underset{\overset{\cap}{Z}}{z_1} = \underset{\overset{\cap}{W}}{w_2} + \underset{\overset{\cap}{Z}}{z_2}$

$\Longrightarrow \underbrace{w_1 - w_2}_{\overset{\cap}{W}} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\overset{\cap}{Z}} \Longrightarrow$ appartiene a $W \cap Z = \{0\}$

$\Longrightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 = 0$

$\Longrightarrow w_1 = w_2, \quad z_1 = z_2.$ $\blacksquare$

Def: se $V = W \oplus Z$ definisco $p : V \to V$, $q : V \to V$ le proiezioni associate, ponendo, se $v = \underset{W}{\underset{\cap}{w}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z}}$,
$p(v) = w$ e $q(v) = z$.

Prop:
- p, q lineari
- $p \circ p = p$, $q \circ q = q$
- $p \circ q = 0$, $q \circ p = 0$
- $p + q = id_V$
- $Im(p) = Ker(q) = W$
- $Ker(p) = Im(q) = Z$

$f : U \to T$ lineare
$Ker(f) = \{u \in U : f(u) = 0\} \subset U$
$Im(f) = \{f(u) : u \in U\} \subset T$
sono sottospazi; inoltre
$\dim(U) = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$

Dim: p lineare: $v_1, v_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$p(v_1) = w_1$ se $v_1 = \underset{W}{\underset{\cap}{w_1}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z_1}}$

$p(v_2) = w_2$ se $v_2 = \underset{W}{\underset{\cap}{w_2}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z_2}}$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(w_1 + z_1) + \lambda_2(w_2 + z_2)$$
$$= \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{\in Z}$$

$$\Rightarrow p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$
$$= \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2).$$

✓

$p\circ p = p.$ $\quad v \in V \quad v = \underset{\substack{\| \\ p(v) \\ \cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}$

inoltre $\quad w = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{0}$

$\Rightarrow p(w) = w$

$\Rightarrow p(p(v)) = p(v)$ $\quad$ cioè $\quad p\circ p = p.$ ✓

$q\circ p = 0$: $\quad v = \underset{\substack{\| \\ p(v) \\ \cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} p+q = id_V \\ p(v) + q(v) = v \ \checkmark \end{array}}$$

inoltre $\quad w = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{0}$

$\Rightarrow q(w) = 0$

$\Rightarrow q(p(v)) = 0$ $\quad$ cioè $\quad q\circ p = 0.$ ✓

$\underline{\mathrm{Im}(p) = W}$: $\quad \mathrm{Im}(p) \subset W$ $\quad$ ok

se $w \in W$ ho $\quad w = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{0} \Rightarrow p(w) = w$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Im}(p)$; allora $\quad W \subset \mathrm{Im}(p).$ ✓

$\mathrm{Ker}(q) = W$; $\quad v \in \mathrm{Ker}(q) \Rightarrow v = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{= q(v)}{0} \Rightarrow v \in W$

$v \in W$; $\quad w = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{0} \Rightarrow q(v) = 0.$ $\blacksquare$

Teo: data $p: V \to V$ lineare, essa è una proiezione associata a una decomposizione in somma diretta se e solo se $p \circ p = p$.

Dimo: proiez $\Rightarrow p \circ p = p$.

Supponiamo $p \circ p = p$. Pongo $W = Im(p)$, $Z = Ker(p)$ e affermo che
(1) $V = W \oplus Z$
(2) p è la proiez. su W associata.

Infatti:

(1) (a) verifico $W + Z = V$

$$v = \underset{\underset{W}{\cap}}{p(v)} + \underbrace{v - p(v)}$$

$$p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$$

$$\Rightarrow v - p(v) \in Z$$

(b) verifico $W \cap Z = \{0\}$

$v \in W \cap Z \Rightarrow v = p(u)$, $p(v) = 0$

dunque $\underset{\overset{\|}{0}}{p(v)} = p(p(u)) = p(u) = v$

$\Rightarrow v = 0$.

(2) $v = \underset{\underset{W}{\cap}}{p(v)} + \underbrace{(v - p(v))}_{\underset{Z}{\cap}}$. ∎

Provare a fare gli esercizi 5.2.1-13.

Rango di $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ $= \dim \operatorname{Im}$ (A pensata come appl. lin.)
$= \dim(\operatorname{Span}(\text{colonne di } A))$
$=$ max numero di colonne di A
che costituiscono sist. di vett. lin. indip.

Determinante:

- è l'unica applicazione $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.
  - è lineare in ciascuna colonna fissate le altre
  - scambiando due colonne cambia segno
  - vale 1 su $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Calcolo:

- $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

- $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

- sviluppo lungo j-esima colonna:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

$A^{ij} =$ matrice ottenuta da A cancellando riga i colonna j

- sviluppo lungo j-esima riga:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A^{ji})$$

- operazioni che non cambiano il det
  - sostituire una col. con sé stessa + multiplo altra
  - " " riga " " " "

Def: se $A \in M_{m \times n}$; ${}^tA \in M_{n \times m}$ trasposta

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}$$

Es: $${}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & \sqrt{5} \\ e & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & e \\ 3 & \sqrt{5} & \pi \end{pmatrix}$$

Fatto: $\det({}^tA) = \det(A)$

Conseguenze: rango per righe = rango per colonne

$f : X \to Y$ funzione tra insiemi
è invertibile se esiste $g : Y \to X$ t.c.
$$g \circ f = id_X \quad , \quad f \circ g = id_Y .$$
Tale g è detta inversa di f, f^{-1}

Fatto:
f invertibile $\iff$ iniettiva, surgettiva (bigettiva)

Fatti: $f: U \to W$ lineare non è invertibile se $\dim(U) \neq \dim(W)$

Se $\dim(U) = \dim(W)$ allora

$$f \text{ iniettiva} \Longleftrightarrow f \text{ surgettiva};$$

in tal caso f^{-1} è lineare.

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ è invertibile se lo è come appl. lin. cioè se esiste $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ t.c.

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Tale B è indicata con A^{-1}.

Fatti:

- A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
- in tal caso:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$$