UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 29/6/21 — Quesiti

Quesito 1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ calcolare $p_A(t)$ sapendo che:

- $\operatorname{tr}(A) = -i$
- $\det(A) = 5$
- $p_A(2i) = -3 - 8i$.

(Ricordare la convenzione che in $p_A(t)$ il coefficiente del termine di grado massimo è 1.)

Quesito 2. Dato $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0\}$ e $f : V \to V$ lineare, sapendo che $p_f(t)$ si annulla se e solo se $t = -7$ oppure $t = 4$, dire se si possa concludere che f è diagonalizzabile, oppure che f non è diagonalizzabile, giustificando entrambe le risposte.

Quesito 3. Fissato su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, trovare il punto del piano $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ più vicino al punto $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Quesito 4. In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare associato alla matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ e determinare tutti i vettori che sono ortogonali a $\begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$ rispetto ad esso, nonché unitari rispetto alla norma ad esso associata.

Quesito 5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} t^4 - 2 & t + 5 \\ t^2 - 1 & t^3 - 7 \end{pmatrix}$.

Quesito 6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[t : -1 : 3]$ e $[2 : 5 : t + 3]$ contiene il punto $[-1 : 3 : 2]$.

Quesito 7. Trovare l'equazione della parabola avente fuoco nel punto $(1, -2)$ e direttrice di equazione $3x - y + 1 = 0$.

Quesito 8. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$2x^2 + 2xy - 4xz + 2x + 10y^2 - 6yz + 4y + 5z^2 - 10z = 0.$$

Giustificare la risposta.

Quesito 9. Per la curva $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 + \ln(t) \\ \frac{4}{5}t^3 - 3t^2 \end{pmatrix}$ calcolare la curvatura nel punto $t = 2$ e il segno della curvatura per ogni t.

Quesito 10. Per la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(u) = \begin{pmatrix} u^2 + \cos(2u) \\ u^3 + \sin(u) \\ -3u^2 + \ln(1+u) \end{pmatrix}$ determinare il riferimento di Frénet, la curvatura e la torsione nel punto $u = 0$.

Risposte ai quesiti

1. $t^3 + it^2 + (2-i)t - 5$

2. Non si può concludere né che f è diagonalizzabile né che non lo è. Ad esempio scelta una base $\mathcal{B}$ di V, le applicazioni f che rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo hanno le matrici

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

soddisfano entrambe le ipotesi descritte, ma la prima non è diagonalizzabile mentre la seconda lo è

3. $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

4. $\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. $t = -2$ e $t = 3$

6. $t = 4$ e $t = -\frac{10}{3}$

7. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 26x + 42y + 49 = 0$

8. Ellissoide

9. $\frac{400}{2601}$; concorde con $t-1$

10. $t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; n = \frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \; b = \frac{1}{\sqrt{57}}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; ; \kappa = \frac{1}{4}\sqrt{114}, \; \tau = -\frac{2}{19}$