Quesito 1. Posto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0\}$$

considerare l'applicazione lineare $f : X \to X$ data da $f(x) = M \cdot x$, dove

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -10 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Trovare il polinomio caratteristico di f, i suoi autovalori e una base che la diagonalizza.

Quesito 2. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice

$$\begin{pmatrix} 2k^2 - 3k - 17 & 2k^2 - 32 \\ -k^2 + k + 12 & -k^2 - k + 23 \end{pmatrix}.$$

Quesito 3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali al piano generato da $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Quesito 4. Nello spazio $\mathbb{C}^2$ determinare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare hermitiano $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$. Ricordare la convenzione:

$$\langle z|w\rangle_A = w^* \cdot A \cdot z.$$

Quesito 5. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

Quesito 6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} t+3 & 3t \\ 15 & 2-2t \end{pmatrix}$ rappresenta la composizione di una omotetia e di una isometria, e dire se tale isometria sia una rotazione o una riflessione.

Quesito 7. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$(t+4) \cdot x^2 + 2t\sqrt{3} \cdot xy + 2y^2 + 6\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{6} \cdot y = 0$$

è una parabola.

Quesito 8. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$-5x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz - 8x - 6z = 0$$

giustificando la risposta.

Quesito 9. Data la curva $\alpha : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ calcolare $\int\limits_\alpha \mathrm{e}^{4x}$.

Quesito 10. Data la curva $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $\beta(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 5t + 6 \\ \ln(1+t) \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\beta \cos(xy) \cdot (y\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y)$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/6/21 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $p_f(t) = t^2 + t - 6;\ \lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -3,\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $k \neq -2$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $k \cdot \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+3i \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{C}$

5. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5\sqrt{2},\ v_{1,2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \mp 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. $t = 5$, riflessione

7. $t = -\frac{4}{3}$

8. Iperboloide ellittico (a due falde)

9. $\frac{5\sqrt{5}}{24}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$

10. $\sin(2\ln(2))$