Geom – Civ – 30/4/21

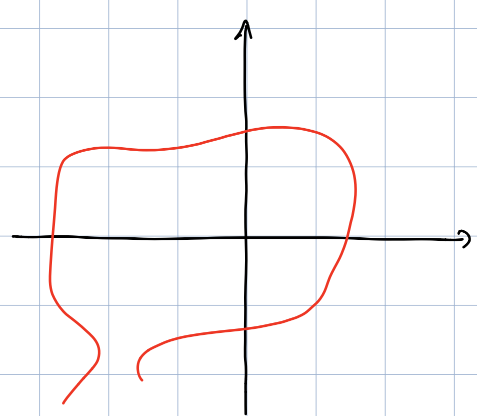
Per favore compilate subito il questionario online di rilevazione dell'opinione degli studenti.

Grazie!

curva regolare parametrizzata: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$

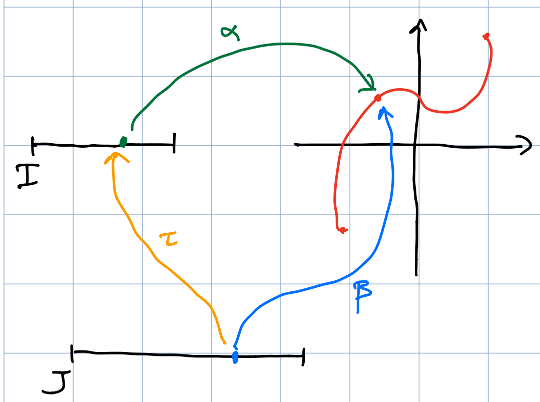
C^1 con $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$

Visto: retta tg. ha giacitura $\alpha'(t)$.



curva = curva parametrizzata a meno di cambio di parametro:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^n \\ J \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$



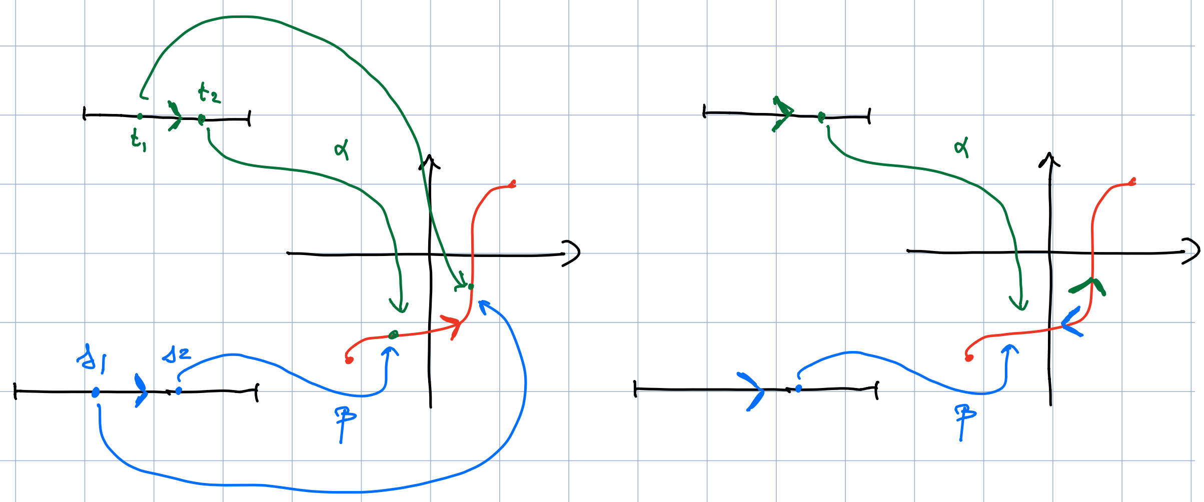
$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$

$(\beta = \alpha \circ \tau)$

τ funzione C^1 invertibile con inversa C^1. Oss: $\sigma = \tau^{-1}$

$\alpha(t) = \beta(\sigma(t))$ $\qquad \alpha = \beta \circ \sigma$

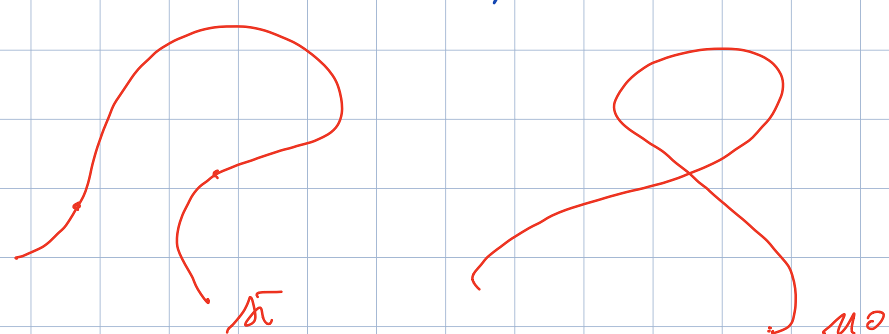
Oss: τ può essere o crescente o decrescente ($\tau' > 0$ oppure $\tau' < 0$).



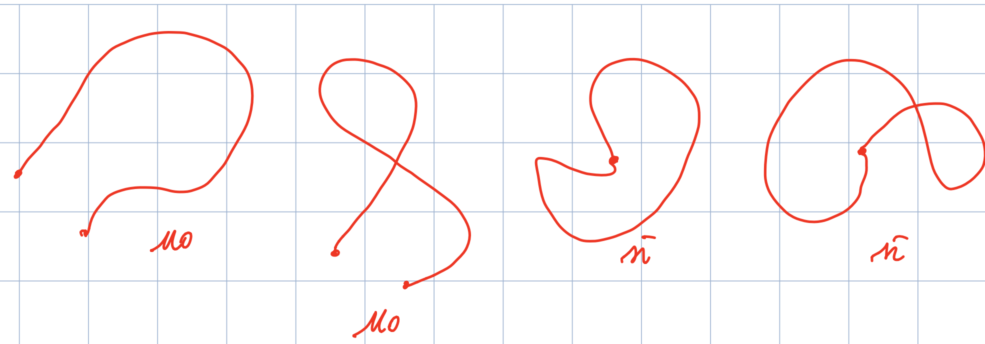
τ crescente $\qquad\qquad$ τ decrescente

Def: chiamo curva orientata (con verso) una curva par. a meno di cambi di par. crescenti.

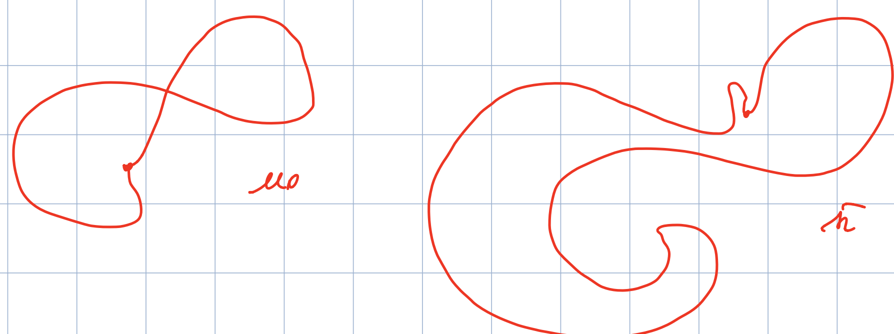
Def: chiamo $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ semplice se è iniettiva



$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ chiusa se $\alpha(a) = \alpha(b)$

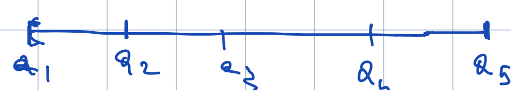


$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ semplice e chiusa se
$\alpha(b) = \alpha(a)$ e $\alpha|_{[a,b)}$ è iniettiva.

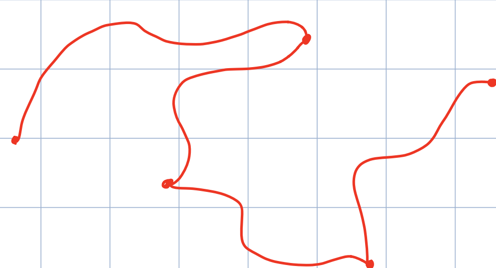


curve regolare a tratti se $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ continua se

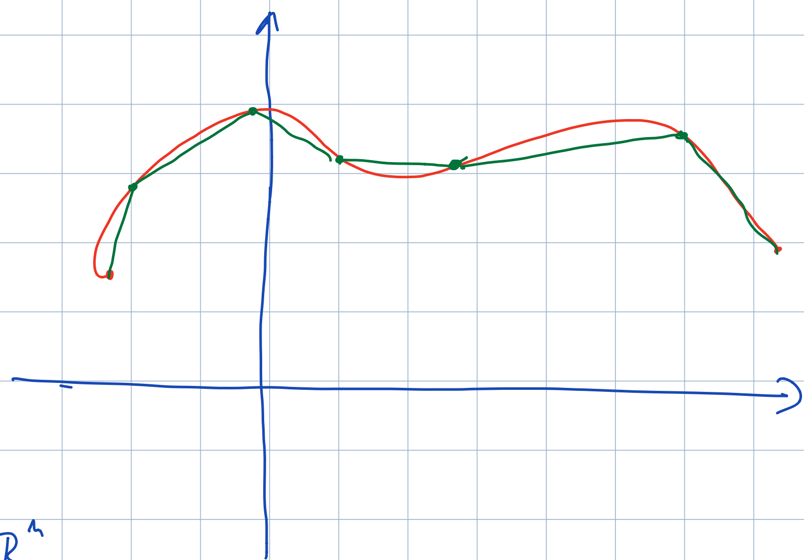
$I =$



$\alpha|_{[a_j, a_{j+1}]}$ è regolare



Lunghezza:



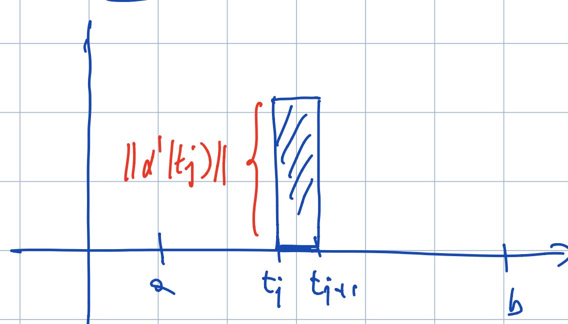
$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$[a,b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \quad [t_{N-1}, t_N]$

$$L(\alpha) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \| \underbrace{\alpha(t_{j+1})}_{\sim} - \alpha(t_j) \|$$

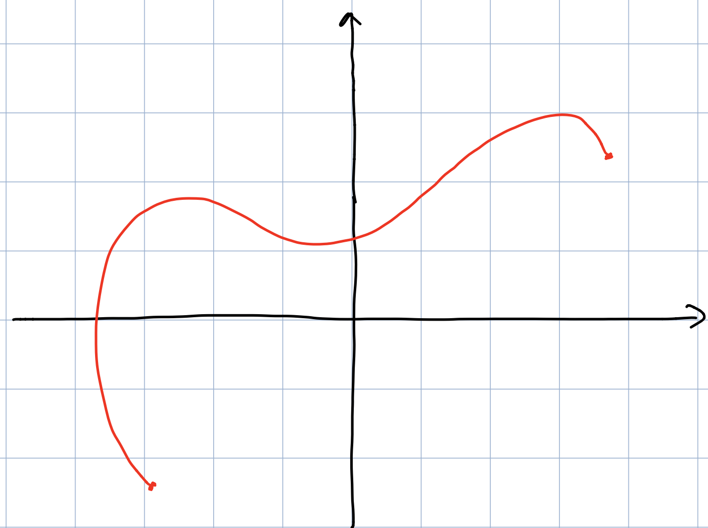
$$\sim \sum_{j=0}^{N-1} \| \overbrace{\cancel{\alpha(t_j)} + \alpha'(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)} - \cancel{\alpha(t_j)} \|$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \| \alpha'(t_j) \| \cdot \underline{(t_{j+1} - t_j)}$$



$$\sim \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

Def: chiamo lunghezza $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$.

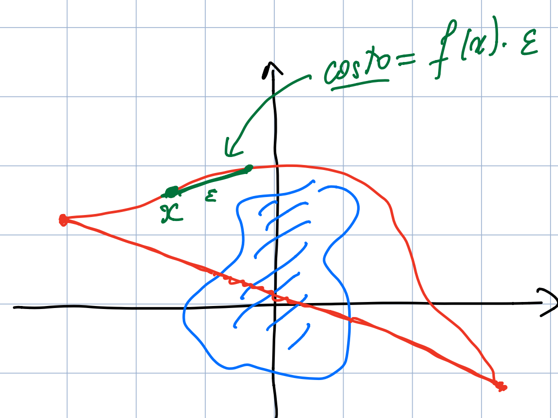


$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x)$ = "costo" di percorrenza nel pto x di un tratto unitario

costo totale:

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \cdot dt$$



Lo chiamo $\int_\alpha f$

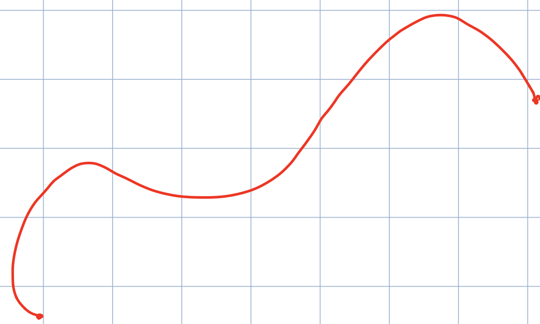
integrale su α della funzione scalare f. Va bene se

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$\alpha : [a,b] \to \Omega$.

Def: diciamo $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t$.

Oss: è sempre possibile riparametrizzare una curva in p. d'arco.



$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$

$\sigma : [a,b] \to [0,L]$

$L = L(\alpha)$

$\tau = \sigma^{-1} \qquad \beta = \alpha \circ \tau$

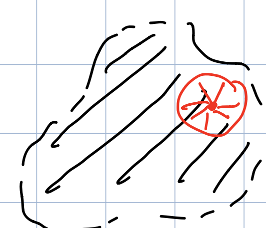
Verifico che β è in p.d'a:

$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\tau(s))}$$

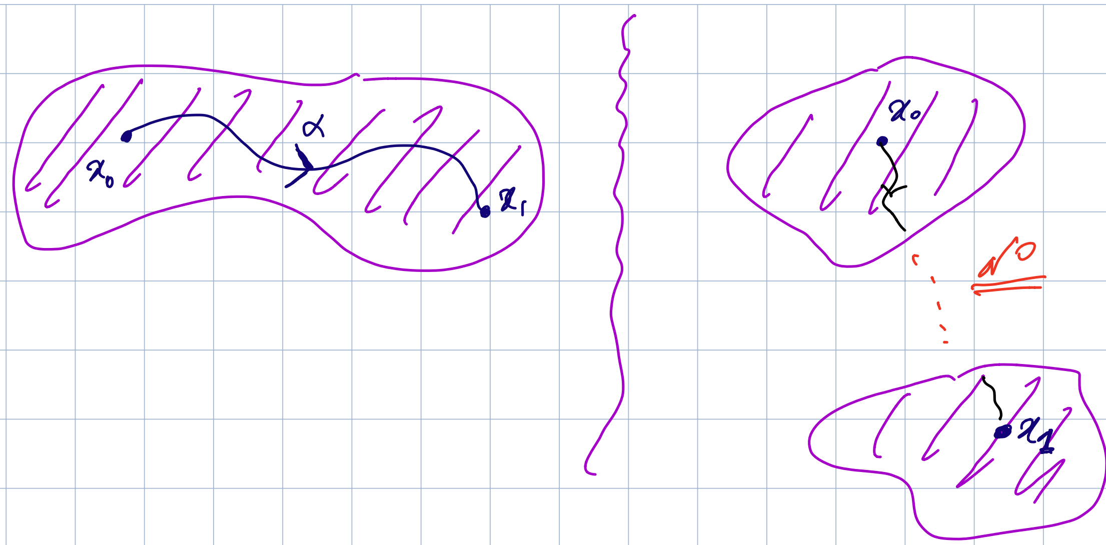
$$= \frac{\alpha'(\tau(s))}{\|\alpha'(\tau(s))\|} \, .$$

OK

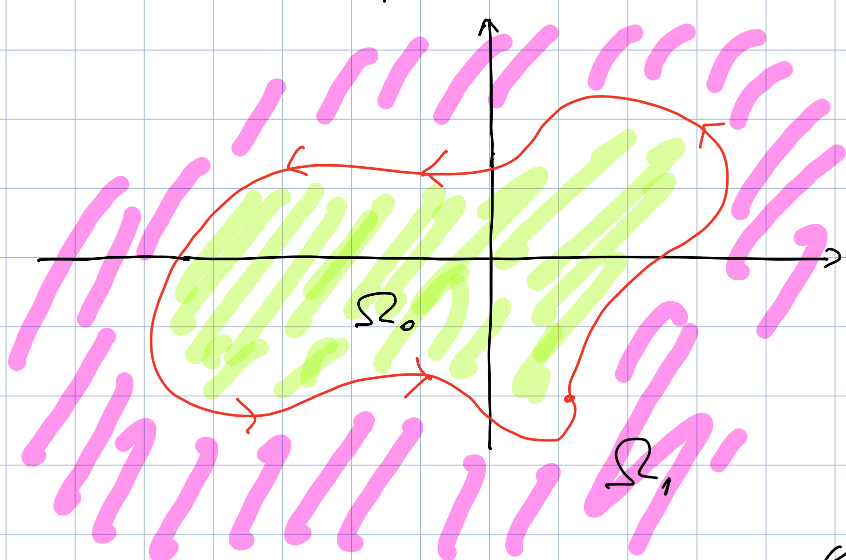
Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall x \in \Omega \ \exists r > 0$ t.c.
$\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r \} \subset \Omega$



Dico che Ω è connesso se
"è fatto da un pezzo solo":
$\forall x_0, x_1 \in \Omega \quad \exists \ \alpha : [0,1] \to \Omega$ t.c. $\alpha(0) = x_0, \ \alpha(1) = x_1$
continua

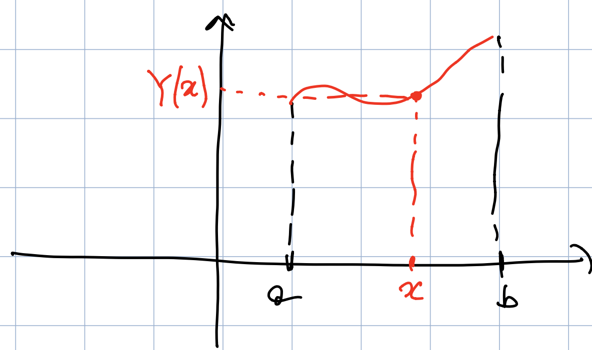


Teo: se $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è una funzione continua e semplice e chiusa allora
$\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1]) = \Omega_0 \cup \Omega_1$
Ω_0, Ω_1 aperti connessi, Ω_0 limitato, Ω_1 no



Teorema difficile chiedendo α continua

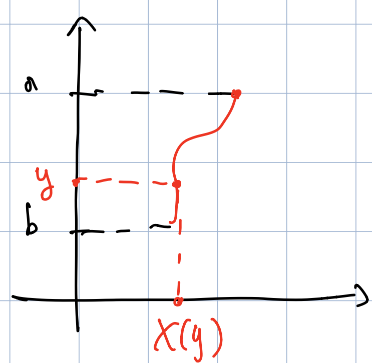
Oss: il grafico di una funzione C^1 è una curva:



$Y : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\alpha(t) = (t, Y(t))$

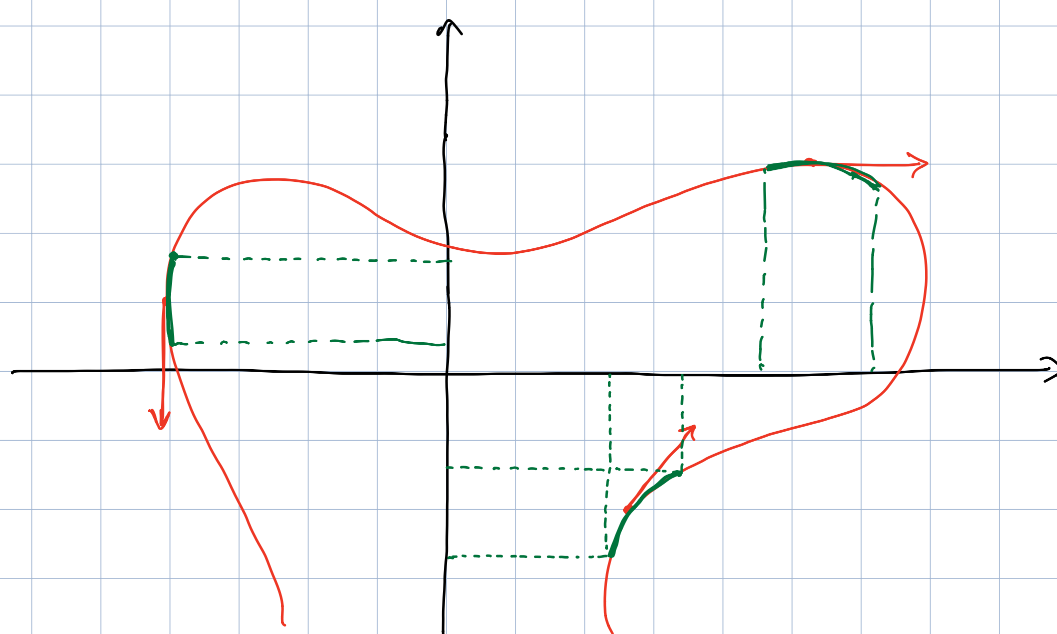
$\alpha'(t) = (1, Y'(t))$



$X : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\alpha(t) = (X(t), t)$

<u>Oss</u>: una curva non è sempre grafico ma localmente sì



Equazioni che definiscono curve:

$x^2+y^2-1=0$ sì $\qquad$ $x^2+y^2=0$ no

$\begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ x>0 \end{cases}$ sì $\qquad$ $x\cdot y=0$ no

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y)=c\}$

Se f = altitudine in una mappa

C = "curve di livello"