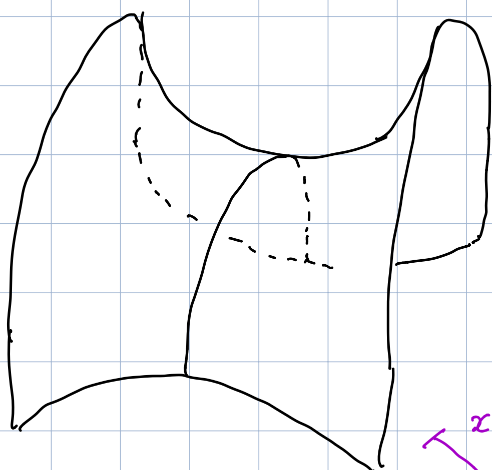
Geom - Cir - 28/4/21

$z = x^2 - y^2$

Pti ∞ $\quad x^2 - y^2 = 0$

$x = \pm y$

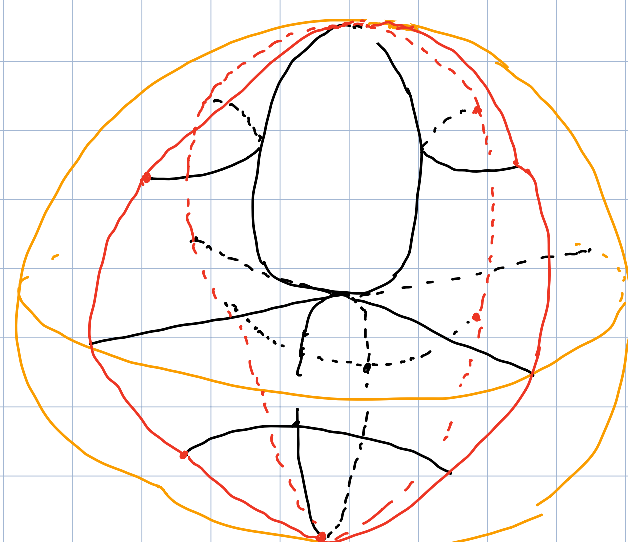
due rette



trasforma $\mathbb{R}^3$ in $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$

∞ per $B^3 = \dfrac{S^2 = \{x : \|x\| = 1\}}{x = -x}$

$x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$



Modelli affini

0. $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ $\quad \emptyset$
1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\quad$ ellissoide
2. $z = x^2 + y^2$ $\quad$ parab. ell

3. $x^2+y^2=z^2-1$ iperb. ell

4. $x^2+y^2=z^2+1$ iperb iperb

5 $z=x^2-y^2$ parab. iperb

Teorema: ogni quadrica non deg.

$$\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=0\}\qquad A\in M_{4\times4}$$

simm. $\det(A)\neq 0$

ha il tipo affine di uno dei modelli 0,1,2,3,4,5 e i segni degli autoval. di A e Q dicono quale.

$$A=\begin{pmatrix}Q & \ell\\ {}^t\ell & c\end{pmatrix};\quad \exists\,\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \text{ trasf. aff. t.c. } \phi(\mathcal{L}) = \text{uno dei modelli}$$

Dim: affermo che: I. Fra i segni degli autoval. di Q e A si danno solo i casi seguenti:

Q	A
x tutti concordi	tutti concordi con quelli di Q $\boxed{0}$
	tre concordi con quelli di Q, uno no $\boxed{1}$
x due concordi, uno nullo $\boxed{2}$	
x due concordi, uno no	due concordi, due no $\boxed{3}$
	tre concordi con i due di Q, uno no $\boxed{4}$
x due discordi, uno nullo $\boxed{5}$	

II. Tramite le trasf. lecite (trasf. affini + cambio segno)
i casi sono preservati

III. In ciascun caso, tramite le trasf. lecite
posso ottenere il modello affine dello stesso numero.

I + II + III = fine dimostrazione.

I. Unico caso escluso per Q è quello di almeno
due autoval. nulli. Però per Teo spettrale $\exists M$ t.c.

$$ {}^tM = M^{-1} \quad , \quad {}^tM \cdot A \cdot M = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{\det = 0} \quad \underline{\text{NO}} $$

Casi per Q tutti coperti.
Casi per A dato il caso Q: se Q ha un autoval. 0 ok
Altrimenti: ho $d_1, d_2, d_3 \neq 0$, $d_4 \neq 0$, dunque

i segni degli autoval di A sono
$\underbrace{d_1, d_2/d_1, d_3/d_2}_{\text{segni autoval. } Q}, d_4/d_3$ $\quad$ ok

II. Già visto in generale: con trasf. affini tutti i segni
sono conservati; con cambio
di segno ok.

III. Analogo al caso coniche

- Applico teo spettr. a Q e trovo $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

- Casi 0,1,3,4, traslo e trovo $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$

  con omotetie trovo $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$

  con riordino e cambio segno a tutto

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & + & \\ & & & + \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & + & \\ & & & - \end{pmatrix} & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{pmatrix} & 3 \\ \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & - & \\ & & & + \end{pmatrix} & 4 \end{matrix}$$

- Casi 2,5 ; applico spettrale a Q e trovo $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

  traslo e trovo $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

  omotetie e cambi segno e riordino

$$\underset{2}{\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{5}{\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\boxtimes$

Come classificare in pratica?

Come trovare segni degli autovalori senza trovare loro?

Caso facile: $d_1, d_2, d_3, (d_4) \neq 0$: segni $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2, d_4/d_3$

Fatto: Se $d_2 \neq 0$ bastano i d_j, infatti:

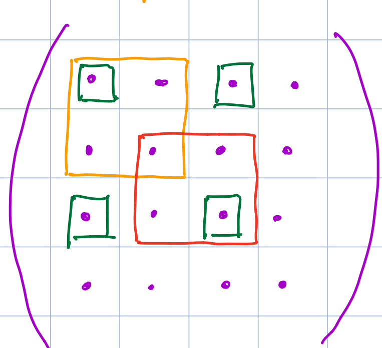
$d_2 > 0$:
- $\to$ $d_3 = 0$ parab. ell (2)
- $\to$ $d_3 \neq 0$ segni $\underbrace{\underbrace{d_1, d_2/d_1, d_3/d_2}_{Q}, d_4/d_1}_{A}$ $\Rightarrow$ **concludo**

d_3

$d_2 < 0$:
- $\to$ $d_3 = 0$ parab. iperb. (5)
- $\to$ $d_3 \neq 0$ segni $\underbrace{\underbrace{+, -, d_3/d_2}_{Q}, d_4/d_3}_{A}$ $\Rightarrow$ **concludo**

$-d_3$

Se $d_2 = 0$ posso riordinare le variabili x, y, z



d_2	d_2'	d_3''
x, y	x, z	y, z

se uno di essi è $\neq 0$, come sopra.

Se $d_2, d_2', d_2'' = 0$ ... non capiterà mai negli esercizi (scarsissimo)

Strategia per classificare il tipo affine di
$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

- controllare $\det(A) \neq 0$ (altrimenti niente)
- cercare uno dei d_2, d_2', d_2'' che sia $\neq 0$ (altrimenti niente)
- per $d_2 > 0$ calcolo d_3; se $d_3 = 0$ parab. ell; se $d_3 \neq 0$ calcolo segni d_1, d_3, d_4 e so che
$$\underbrace{\underbrace{d_1, d_2/d_1, d_3/d_2,}_{Q} \; d_4/d_3}_{A} \Longrightarrow \text{ragiono su quale modello sia giusto } \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

- per $d_2 < 0$ calcolo d_3; se $d_3 = 0$ parab. iperb.; se $d_3 \neq 0$ calcolo segni di d_3, d_4 e so che
$$\underbrace{\underbrace{+, -, -d_3,}_{Q} \; d_4/d_3}_{A} \Longrightarrow \text{ragiono su quale modello sia ok } \begin{pmatrix} + & & & \\ & - & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

ESAME

Modalità di emergenza dello scorso anno

= scritto con 10 domande da 10' l'una + orale

garantito online
possibile in presenza

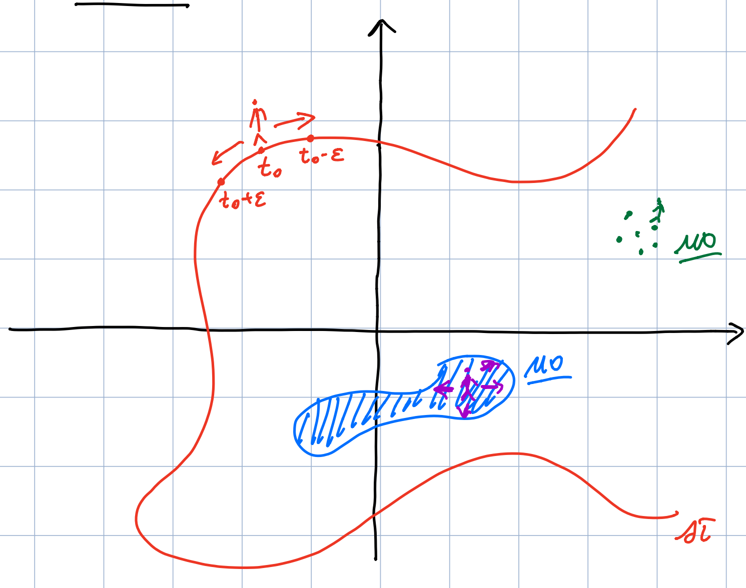
breve subito per confermare scritto
e, facoltativo, lungo quando volete per miglioramento
(con qualche dimo a scelta per la lode)

senza orale lungo voto ≤ 27

PRIMA superare AL

POI: medie per eccesso con voto Caboara

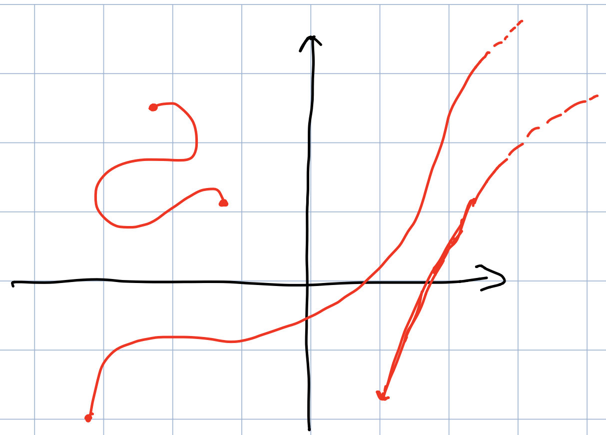
Curve

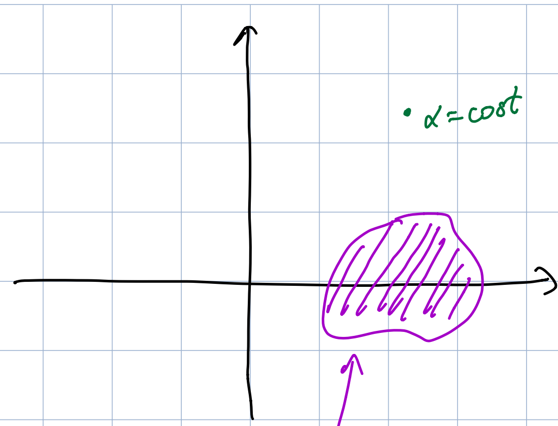


"oggetto unidimensionale non dritto in $\mathbb{R}^n$"

Def: chiamo curva parametrizzata una funzione $\overset{\text{continua}}{\alpha}: I \to \mathbb{R}^n$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (limitato o meno a sin/dx con estremo o meno a sin/dx)

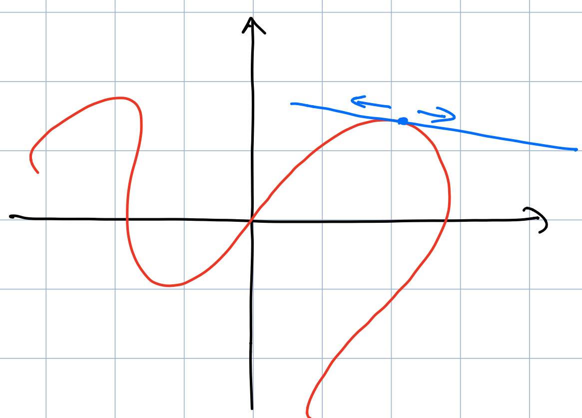
NON FINALE





fatto: esistono $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ continue che riempiono questo.

Dunque: continuo non basta;
bisogna aggiungere idea della tangente
= direzione nella quale ci si muove



NON FINALE

Def: curva parametrizzata è $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1

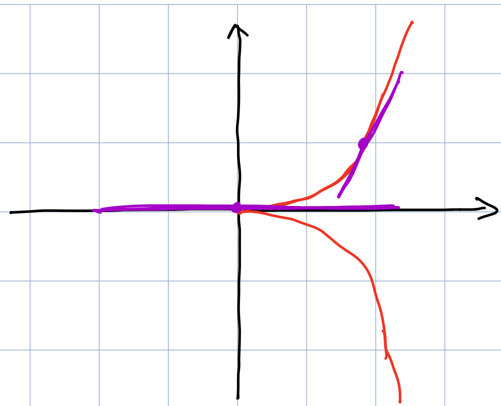
$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{con } x_j \text{ funz. } C^1$$

Vogliamo che in ogni punto ci sia una direzione su cui muoversi nei due versi

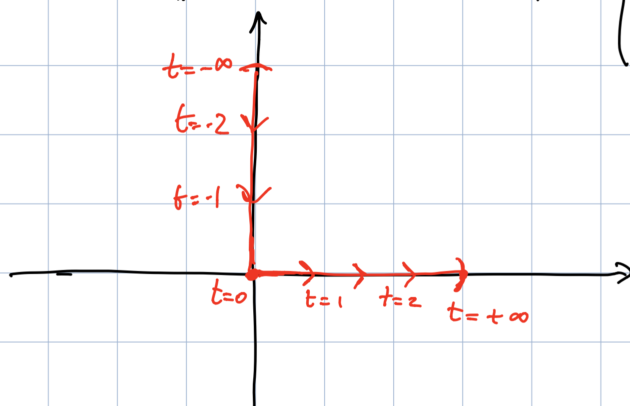
Fatto: C^1 non garantisce ciò (nemmeno C^∞)

Es 1: $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^{2/3} \\ t = \sqrt[3]{y} \end{cases}$$



Es 2: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \alpha(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{-1/t^2} \\ 0 \end{pmatrix} & t > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-1/t^2} \end{pmatrix} & t < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & t = 0 \end{cases}$



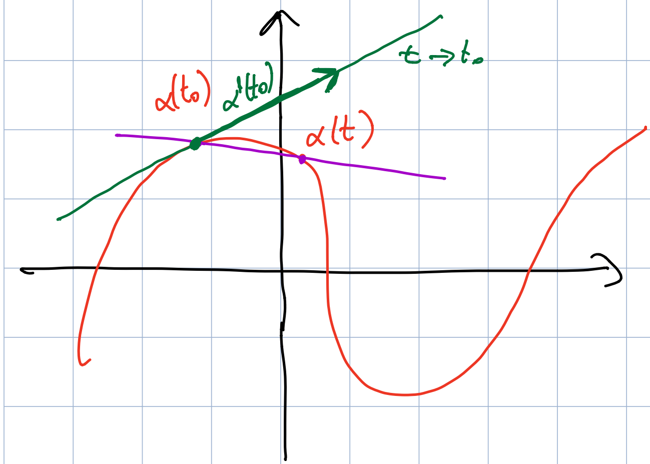
Oss: $\lim_{t \to 0^\pm} D^k\left(e^{-1/t^2}\right) = 0 \qquad \forall k$

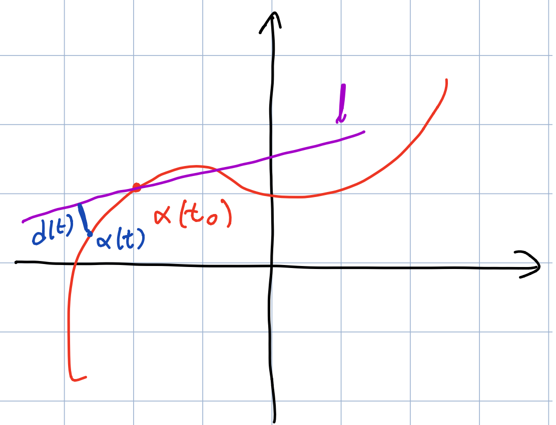
$\Longrightarrow \alpha$ è C^∞ ma in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non c'è tangente

Def: chiamo curva parametrizzata regolare una $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$

Prop: se α è regolare e $t_0 \in I$ allora la retta passante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ è unica e tende per $t \to t_0$

alla retta $\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha'(t_0))$. Inoltre tale retta è l'unica con "contatto doppio" con l'immagine di α in $\alpha(t_0)$.





$d(t) = \mathrm{dist}(\alpha(t), l)$

$d(t_0) = 0$ contatto semplice

$d'(t_0) = 0$ contatto doppio

Tale retta sarà detta tangente ad α in $\alpha(t_0)$.

Dim: retta per $\alpha(t)$ e $\alpha(t_0)$ è

$$\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha(t)-\alpha(t_0)) = \alpha(t_0) + \mathrm{Span}\left(\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t}\right)$$

$\downarrow t \to t_0$

$\alpha'(t_0)$

Provo che l'unica l per cui $d'(t_0) = 0$ è tale retta $(n=2)$.

$l: \quad ax + by + c = 0 \qquad a^2 + b^2 = 1$

$\alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ devo vedere che l ha giacitura $\begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$

cioè $\boxed{a X'(t_0) + b Y'(t_0) = 0}$.

$$d(t) = |a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c|$$

$$d(t_0) = 0 \iff c = -a \cdot X(t_0) - b \cdot Y(t_0)$$

$$d(t) = \sqrt{(a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c)^2}$$

$$d'(t) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \left((a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c)^2\right)^{-1/2} \cdot \cancel{2} \cdot (a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c) \cdot (a \cdot X'(t) + b \cdot Y'(t))$$

$$= \underbrace{\frac{a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c}{|a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c|}}_{\pm 1} \cdot (a \cdot X'(t) + b \cdot Y'(t))$$

affinché $\lim_{t \to t_0} d'(t) = 0$ è necessario che $a \cdot X'(t_0) + b \cdot Y'(t_0) = 0$

$\blacksquare$