Geom - Civili - 26/3/21

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})$$

$$v_{1,2}: \begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})x \\ -x - 2y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})y \end{cases} \qquad \begin{cases} (5 \mp \sqrt{29})x = 2y \\ (5 \pm \sqrt{29})y = -2x \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 - \sqrt{29} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 + \sqrt{29} \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = 4 + 25 - 29 = 0 \quad \checkmark$$

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ base ortonormale autovettori

$U = (u_1, u_2)$ matrice ortog. che diagonalizza.

<u>fine dimo sospese</u>: $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sta $\langle \cdot | \cdot \rangle_{A_{k+1}}$ su $\mathbb{R}^{k+1}$

$\bar{P} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ dim $= p$ su cui $\langle x | x \rangle > 0$
$\bar{N} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ dim $= k-p$ su cui $\langle x | x \rangle < 0$

i) $d_k > 0$, $d_{k+1} > 0$ tesi: A_{k+1} ha ~~p+1 autoval pos~~ $k-p$ autoval neg.

$d_k > 0 \rightarrow$ $k-p$ pari

$d_{k+1} > 0 \rightarrow$ # autoval neg. pari

Se non sono esattamente $k-p$ neg sono:

$\geq k-p+2 \Rightarrow \exists N'$ dim $\geq k-p+2$ su cui $\langle x|x\rangle < 0$

$$\underset{p}{\overline{P}} \cap \underset{\geq k-p+2}{N'} \neq \{0\} \qquad p+(k-p+2) = k+2 > k+1$$

ma $\langle x|x\rangle > 0$ su $\overline{P}$, $\langle x|x\rangle < 0$ su N'

$\leq k-p-2$

$\Downarrow$

i pos sono almeno $k+1-(k-p+2) = p+3$

$\Rightarrow \exists P'$ dim $\geq p+3$ su cui $\langle x|x\rangle > 0$

$$\underset{k-p}{\overline{N}} \cap \underset{\geq p+3}{P'} \neq \{0\} \qquad k-p+p+3 = k+3 > k+1$$

ma ....

2) $d_k > 0$ $\quad d_{k+1} < 0$ $\qquad$ Tesi: $k-p+1$ neg

$k-p$ pari $\qquad$ numero autoval neg è dispari

se non sono esattamente $k-p+1$ sono:

$\geq k-p+3 \Rightarrow \exists N'$ dim $\geq k-p+3$ su cui $\langle x|x\rangle < 0$

$$\underset{p}{\overline{P}} \cap \underset{k-p+3}{N'} \neq \{0\} \qquad p+k-p+3 = k+3 > k+1$$

assurdo

$\leq k-p-1 \Rightarrow$ ne ho positivi $\geq k+1-(k-p-1) = p+2$

$\Rightarrow \exists P'$ dim $\geq p+2$ su cui $\langle x|x\rangle > 0$

$$\underset{k-p}{\overline{N}} \cap \underset{p+2}{P'} \neq \{0\} \qquad k-p+p+2 = k+2 > k+1$$

.. assurdo

Casi 3, 4 esercizio.

Conseguenze reali del teo spettrale complesso

$A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ortogonale (isometria)

${}^tA = A^{-1}$ ma A è reale ${}^tA = A^*$ $\Rightarrow$ $A^* = A^{-1}$ $\Rightarrow$ A unitaria.

$\Rightarrow$ ha autoval di modulo 1.

- $\lambda = \pm 1 \in \mathbb{R}$ e posso scegliere l'autovett. reale

coniugata a: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \boxed{*} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

- $\lambda = e^{i\vartheta} \notin \mathbb{R}$; prendo $z = x + iy$ un relativo autovettore.

Oss 1: $A \cdot z = e^{i\vartheta} \cdot z$

$\Rightarrow A \cdot \bar{z} = e^{-i\vartheta} \cdot \bar{z}$ $\qquad e^{-i\vartheta} \neq e^{i\vartheta}$

$\Rightarrow \bar{z} \perp_{\mathbb{C}^n} z$

$\Rightarrow \langle z | \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$

$\Rightarrow {}^tz \cdot z = 0$

$\Rightarrow ({}^tx + i\,{}^ty)(x + iy) = 0$

$\Rightarrow {}^tx \cdot x - {}^ty \cdot y + 2i\,{}^tx \cdot y = 0$

$\Rightarrow \|x\|^2_{\mathbb{R}^n} - \|y\|^2_{\mathbb{R}^n} + 2i \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x \perp y \\ \|x\| = \|y\| \end{cases}$ (posso supporre $\|x\| = \|y\| = 1$)

Oss 2: $Az = e^{i\vartheta} \cdot z$

$\Rightarrow A(x+iy) = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(x+iy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\cdot x = \cos\vartheta \cdot x - \sin\vartheta \cdot y \\ A\cdot y = \sin\vartheta \cdot x + \cos\vartheta \cdot y \end{cases}$$

Su Span(x,y) rispetto alla base ortonormale x,y la A agisce come $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R_\vartheta$ rotaz. angolo ϑ.

Teo: se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale $\exists M$ ${}^tM = M^{-1}$ t.c.

$$ {}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \boxed{\pm 1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\pm 1} & & \\ & & & \boxed{R_{\vartheta_1}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{R_{\vartheta_p}} \end{pmatrix} $$

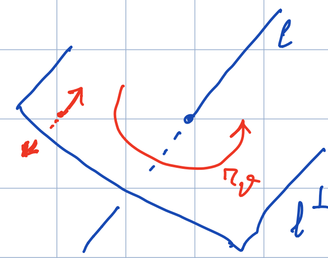
$n = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ id $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ riflessione

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ riflessione $\quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R_\vartheta$

$n = 3$ $\quad \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$ = descrivete a parole per esercizio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{|c}{\multirow{2}{*}{R_ϑ}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{|c}{\multirow{2}{*}{R_ϑ}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

rotazione intorno a ℓ $\qquad$ rotazione intorno a ℓ + riflessione rispetto $\ell^\perp$



$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad {}^tA = -A$

antihermitiana $\Rightarrow$ autoval. imm. puri.

- 0 — scelgo autovett. reale

- $\lambda = i\cdot t \qquad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$

$z = x + iy$ autovett. $\qquad \bar\lambda = -it$ è autoval. con autovett. $\bar z$

$\Rightarrow x \perp y, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$

$A(x+iy) = i\cdot t\,(x+iy) \qquad \begin{cases} A\cdot x = -t\cdot y \\ A\cdot y = t\cdot x \end{cases}$

$\rightarrow$ su $\mathrm{Span}(x,y)$ ho $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$

Teo: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A \Rightarrow \exists M \quad {}^tM = M^{-1}$ t.c.

$$M^{-1}\cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -t_1 \\ t_1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -t_p \\ t_p & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$n = 3$ ogni antisimm. è coniugata a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$$