Geom - Civili - 24/3/21

forze = simm + antisimm

simm → sforzi

antisimm → mov. rigido

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ — che significa?

Teo (spettrale): $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

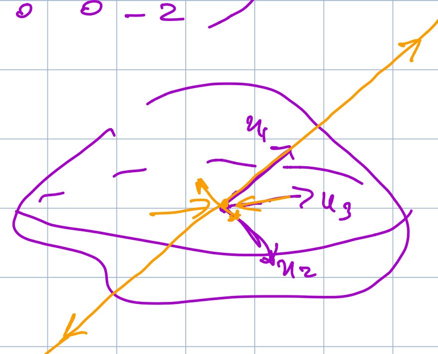
simmetrica $\Longleftrightarrow$ si diagonalizza tramite ortogonale

cioè $\exists M$ ortog. $({}^tM = M^{-1})$ t.c. $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

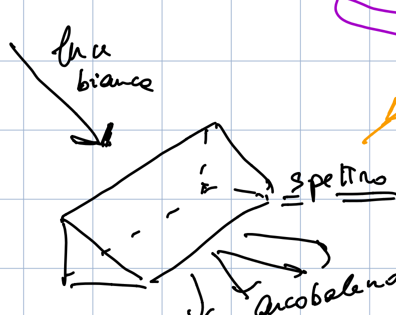
cioè esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ fatta da autovettori di A

A simm $\rightsquigarrow {}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$M = (u_1, u_2, u_3)$



"spettrale"



<u>Dim:</u> $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e $M^{-1}\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A$ simm

Infatti: $A = M\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot M^{-1} = M\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot {}^tM$

$$\Rightarrow {}^tA = M\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot {}^tM$$ <u>OK</u>

<u>Viceversa:</u> A simm.

Proviamo per induzione su n che ammette base ortonormale autovettori.

$n = 1$: OK

Supponiamo vero per n; prendiamo $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$ simm.

Scelgo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ una radice di $p_A(t)$, cioè un autovalore complesso; $\exists z_0 \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ t.c. $A\cdot z_0 = \lambda_0\cdot z_0$.

Affermo che $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\langle z_0 | A\cdot z_0\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}} = \langle z_0 | \lambda_0\cdot z_0\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}} = \bar{\lambda}_0\cdot \cancel{\|z_0\|^2_{\mathbb{C}^{n+1}}}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\langle A^*\cdot z_0 | z_0\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}} = \langle Az_0 | z_0\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}}$$
$$= \langle \lambda_0 z_0 | z_0\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}} = \lambda_0\cdot\cancel{\|z_0\|^2_{\mathbb{C}^{n+1}}}$$

$\Rightarrow \bar{\lambda}_0 = \lambda_0$ cioè λ_0 è reale.

Posso scegliere u_0 autovettore reale risp. a λ_0 e unitario.
Completo u_0 a base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$ cioè trovo

$N \in M_{(n+1)\times(n+1)}$ $\quad {}^tN = N^{-1}$ $\quad N^{-1} \cdot A \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & r \\ \hline 0 & \\ 0 & A_0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$

$r \in M_{1\times n}$ $\quad A_0 \in M_{n\times n}$

$${}^t\left(N^{-1}\cdot A\cdot N\right) = {}^t\left({}^tN\cdot A\cdot N\right) = {}^tN\cdot A\cdot N$$

$\Rightarrow$ è simmetrica

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_0 & r \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$ è simmetrica:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ {}^tr & {}^tA_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & r \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 0 \\ {}^tA_0 = A_0 \end{array}$$

Per induzione esiste N_0 $\quad {}^tN_0 = N_0^{-1}$ $\quad N_0^{-1}\cdot A_0 \cdot N_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Chiamo $M = \underbrace{\underbrace{N}_{\text{ortog}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}}_{\text{ortog.}}}_{\text{ortog}}$

$$M^{-1}\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_0^{-1} \end{pmatrix}\cdot N^{-1}\cdot A\cdot N\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_0^{-1} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & N_0^{-1}\cdot A_0\cdot N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Teo (spettrale): A reale simm $\iff$ diago via ortog

Oss: gli autospazi di A simm sono ortog. fra loro

$$M^{-1}\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} 2 &&&&&&&& \\ & 2 &&&&&&& \\ && 2 &&&&&& \\ &&& 5 &&&&& \\ &&&& 5 &&&& \\ &&&&& -3 &&& \\ &&&&&& -3 && \\ &&&&&&& -3 & \\ &&&&&&&& -3 \end{pmatrix}$$

autospazi:

2: $\operatorname{Span}(u_1\, u_2\, u_3)$

5: $\operatorname{Span}(u_4, u_5)$

-3: $\operatorname{Span}(u_6\, u_7\, u_8\, u_9)$

$M = (u_1, \dots, u_9)$ base ortonormale

In particolare se gli autoval sono distinti i relativi autovettori sono automaticamente ortog. fra loro.

Come cercare base ortonormale di autovettori di A?

- se autoval distinti: trovo autovett. e li normalizzo
- in generale: trovo basi ortonormali dei vari autospazi.

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simm.

$P_A(t) = t^2 - t - 7$ $\qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+28}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{29}\right)$

$V_{1,2}$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{29}\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})x \\ -x + 2y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})y \end{cases} \qquad \begin{cases} (5 \mp \sqrt{29})x = 2y \\ (3 \mp \sqrt{29})y = 2x \end{cases}$$

verificare calcoli

Fatto: $v_1 \perp v_2$; $u_1 = v_1/\|v_1\|$, $u_2 = v_2/\|v_2\|$.

Per quali A simm ho che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos.?

Esiste M $\quad {}^tM = M^{-1}$ $\quad M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\langle x | x \rangle_A > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$\iff \langle M\cdot y | M \cdot y \rangle_A > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$$

$$\iff {}^t(M\cdot y)\cdot A \cdot (M \cdot y) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$$

$$\iff {}^ty \cdot \underbrace{{}^tM \cdot A \cdot M}\cdot y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$$

$$\iff {}^ty \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$$

$$\iff \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$$

$$\iff \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0.$$

Teorema: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def pos. $\iff$ A ha autoval. pos.

Ricordo: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è def pos. $\iff a > 0$ e $ac - b^2 > 0$.

$$\iff a + c > 0 \text{ e } ac - b^2 > 0$$

$$\iff tr(A) > 0 \text{ e } \det(A) > 0$$

$$\iff \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \text{ e } \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

$$\iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm. pongo

A_k = l'angolo $k\times k$ in alto a sinistra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_1 = (1) \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = A$$

$$d_k = \det(A_k).$$

Teo: se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$ allora i segni degli autoval di A coincidono con i segni di $d_1, d_2/d_1, d_3/d_2, \dots, d_n/d_{n-1}$

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0 \implies \lambda_1 > 0.$

$d_2 = -4 \qquad d_2/d_1 < 0 \implies \lambda_2 < 0$

$d_3 = -35 - 6 - 6 - 5 + 63 - 4 > 0 \qquad d_3/d_2 < 0 \implies \lambda_3 < 0$

Autoval di A: $(+, -, -)$

Versione complessa del Teo. spettrale.

- $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ unitaria se $U^* = U^{-1}$ (cioè colonne base ortonormale di $\mathbb{C}^n$)

Def: chiamo $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ <u>normale</u> se

$$A^* \cdot A = A \cdot A^*.$$

Es: sono normali ad esempio (ma non solo):

- A unitaria (in part. A ortogonale reale)
- A hermitiana $A^* = A$ (in part. simm. reale)
- A antihermitiana $A^* = -A$ (in part. antisimm. reale)

Teo: A normale $\iff$ si diagonalizza via unitaria

$\iff \exists U$ t.c. $U^* = U^{-1}$ e $U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\iff$ A ammette base ortonormale di autovettori

Dim: $\Leftarrow$ $\quad U^{-1} \cdot A \cdot U = D \qquad U^* = U^{-1}$

$$\Rightarrow A = U \cdot D \cdot U^*$$

$$A^* \cdot A = (U \cdot \bar{D} \cdot \underbrace{U^*) \cdot (U}_{I_n} \cdot D \cdot U^*) = U \cdot \underbrace{\bar{D} \cdot D} \cdot U^*$$

$$A \cdot A^* = (U \cdot D \cdot \underbrace{U^*) \cdot (U}_{I_n} \cdot \bar{D} \cdot U^*) = U \cdot \underbrace{D \cdot \bar{D}} \cdot U^*$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$\Longrightarrow$ Per induzione su n.

$n = 1$ ✓

Supponiamo vero per n e $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}$.

Prendo u_0 autovett. risp. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ autoval, completo a $u_0, \dots, u_n$ ortonormale $\Longrightarrow \exists V \quad V^* = V^{-1}$

$$V^* \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

Ora provo che $\pi = 0$ e A_0 è normale: conclusione come prima.

Per quanto visto prima, $V^* \cdot A \cdot V$ è normale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}^*$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_0} & 0 \\ \pi^* & A_0^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_0 & \pi \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\lambda_0} & 0 \\ \pi^* & A_0^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_0|^2 & \dots \\ \dots & \pi^* \cdot \pi + A_0^* \cdot A_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} |\lambda_0|^2 + \|{}^t\pi\|^2 & \dots \\ \dots & A_0 \cdot A_0^* \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \|{}^t\pi\| = 0 \Longrightarrow \pi = 0$

$\Longrightarrow A_0^* \cdot A_0 = A_0 \cdot A_0^*$. ▨

Conseguenze complesse:

1) A unitaria $\Longleftrightarrow$ diago tramite unitaria e ha autoval. di modulo 1.

$\Longrightarrow$ OK + λ autoval, z autovett.

$$\|A\cdot z\| = \cancel{\|z\|}$$

$$\|\lambda\cdot z\|$$

$$|\lambda|\cdot \cancel{\|z\|} \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$$\Leftarrow: \underbrace{U^{-1}\cdot A\cdot U = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\text{unitaria}} \qquad |\lambda_j| = 1$$

$$\Rightarrow A = U\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\cdot U^{-1} \qquad \text{unitaria}$$

2) A hermitiana $\Longleftrightarrow$ A diago rio unitaria e ha autoval. reali

$\Rightarrow$ OK + dimo per A simm. reale

$$\Leftarrow \qquad U^*\cdot A\cdot U = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

$$A = U\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\cdot U^*$$

$$\|$$

$$A^* = U\cdot\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n\end{pmatrix}\cdot U^* = A$$

3) A antihermitiana $\Longleftrightarrow$ A diago rio unitaria + autoval. imm. puri

$\Rightarrow$: OK + sia λ autoval. con autovett. z:

$$\langle Az|z\rangle = \langle z|A^*z\rangle$$

$$\langle \lambda z|z\rangle \qquad \langle z|-Az\rangle$$

$$= \langle z|-\lambda z\rangle$$

$$\lambda\cdot\cancel{\|z\|^2} \qquad = -\bar\lambda\cdot\cancel{\|z\|^2}$$

$\Leftarrow$: come sopra. $\blacksquare$

Teo: se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm. e $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$
allora i segni degli autoval. di A sono uguali e quelli di $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}}$

Faccio la dimo supponendo anche $d_n \neq 0$.

Lem: se $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ simm con p autoval pos. e $k-p$ neg.
esistono $P, N \subset \mathbb{R}^k$ $\dim(P) = p$ $\dim(N) = k-p$ t.c.

$$\langle x|x\rangle_B > 0 \quad \forall x \in P \setminus \{0\}$$
$$\langle x|x\rangle_B < 0 \quad \forall x \in N \setminus \{0\}$$

Dimo: Sia $u_1, \dots, u_n$ base ortonormal di $\mathbb{R}^k$ con

$$B \cdot u_j = \lambda_j \cdot u_j \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$$
$$\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_k < 0.$$

$$P = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_p) \qquad N = \mathrm{Span}(u_{p+1}, \dots, u_k)$$

$$x \in P \Rightarrow x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p \neq 0$$
$$\langle x|x\rangle_B = {}^t x \cdot B \cdot x = (\alpha_1 {}^t u_1 + \dots + \alpha_p {}^t u_p)(\lambda_1 \alpha_1 u_1 + \dots + \lambda_p \alpha_p u_p)$$
$$= \lambda_1 \cdot \alpha_1^2 + \dots + \lambda_p \cdot \alpha_p^2 > 0.$$

$$x \in N \Rightarrow \langle x|x\rangle_B = \lambda_{p+1} \alpha_{p+1}^2 + \dots + \lambda_k \cdot \alpha_k^2 < 0.$$ $\blacksquare$

Dim (Teo): dimostro per induzione finita su $k=1,\dots,n$ che A_k ha autoval. di segni $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_k}{d_{k-1}}$.
Per $k=n$ è il Teo.

$k=1 \qquad A_1 = (a_{11}) \qquad d_1 = a_{11} = $ l'autoval. di A_1 ✓

Supponiamo vero per k. Proviamo per $k+1$. Uso:

- det = prodotto autovalori
- prodotti di numeri è pos. se i negativi sono pari, neg. se i negativi son dispari

Sappiamo: gli autoval di A_k hanno i segni di $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_k}{d_{k-1}}$.
Facciamo che ce ne sono p positivi e $k-p$ negativi

$\Rightarrow \exists\, P, N \subset \mathbb{R}^k \quad \dim(P) = p \quad \langle x|x\rangle_{A_k} > 0 \ \forall x \in P$

$\dim(N) = k-p \quad \langle x|x\rangle_{A_k} < 0 \ \forall x \in N$

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$

$\Rightarrow \exists\, \overline{P}, \overline{N} \subset \mathbb{R}^{k+1} \quad \dim(\overline{P}) = p \quad \langle x|x\rangle_{A_{k+1}} > 0 \ \forall x \in \overline{P}$

$\dim(\overline{N}) = k-p \quad \langle x|x\rangle_{A_{k+1}} < 0 \ \forall x \in \overline{N}$

Tesi: i segni degli autoval di A_{k+1} sono $\underbrace{d_1, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_k}{d_{k-1}}}_{\substack{p \text{ pos} \\ k-p \text{ neg}}}, \frac{d_{k+1}}{d_k}$

Casi possibili Tesi

d_k	d_{k+1}	A_{k+1} ha autoval	
+	+	$p+1$ pos	$k-p$ neg
+	−	p pos	$k-p+1$ neg
−	+	p pos	$k-p+1$ neg
−	−	$p+1$ pos	$k-p$ neg.

[da finire]