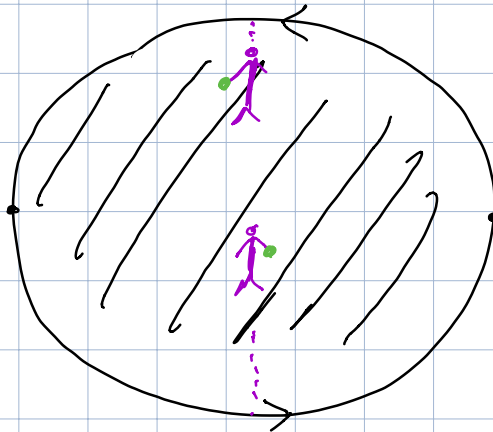


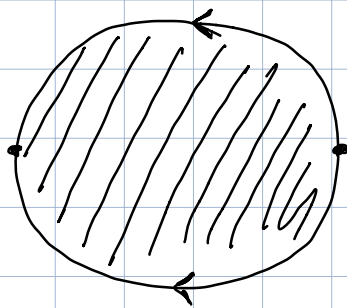
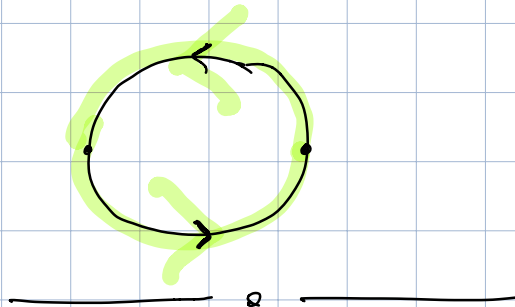
Geom - Cirila - 21/4/21

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \approx$$



Oggetti che si possono costruire identificando tra loro  
lati di poligoni (di forma)

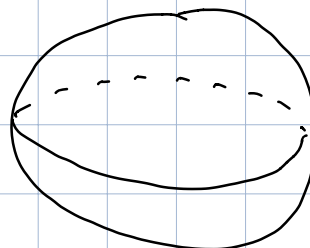
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \approx$$



=

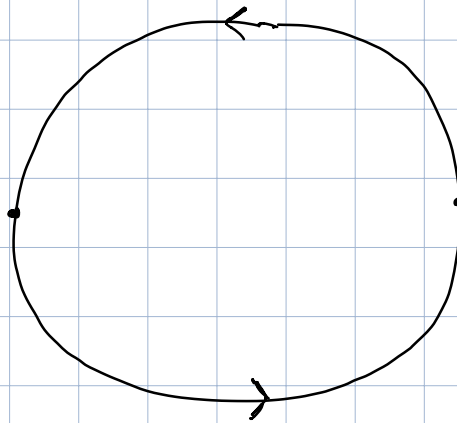


=



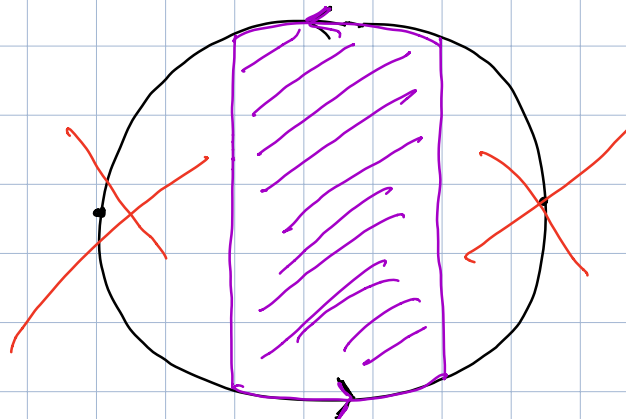
$$= \mathbb{RP}^2$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$$

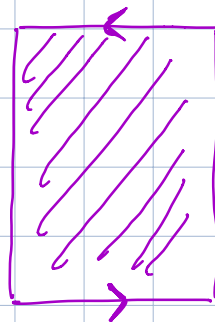


FATTO: non è  
possibile realizzare  
questo oggetto in  $\mathbb{R}^3$

Pero:



$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \supset$$



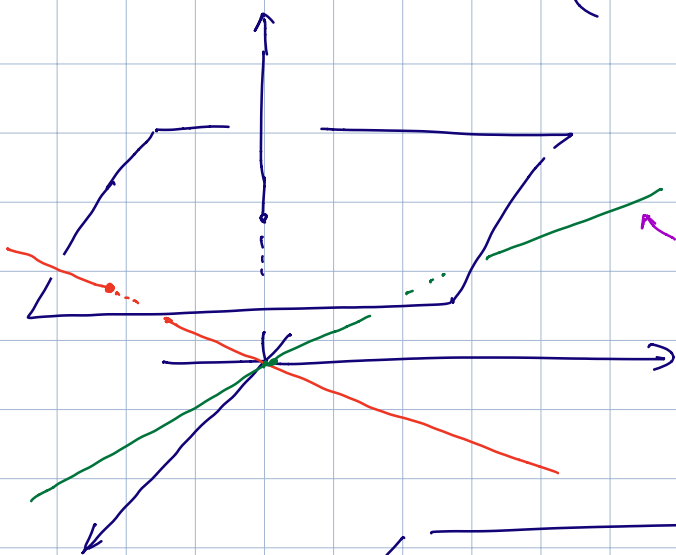
Nastro di Möbius  
(Moebius)

Visto  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{P}^0(\mathbb{R})$   
 $\quad \quad \quad \{\infty\}$

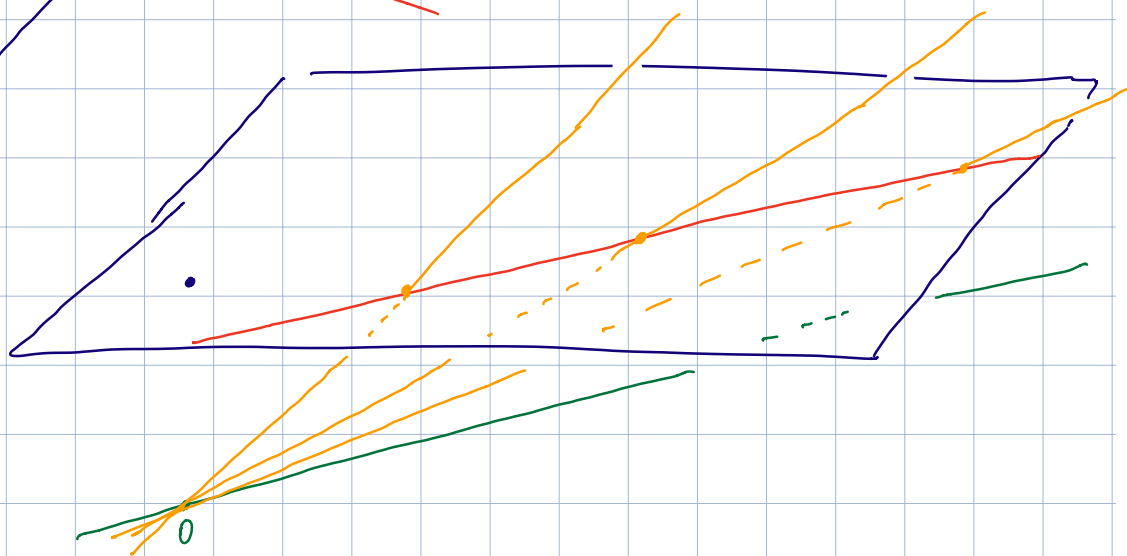
Analogamente:  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{\text{rette per } 0 \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}\}$

$$= (\mathbb{R}^n \times \{1\}) \cup \{\text{rette per } 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times \{0\}\}$$

$$= \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$



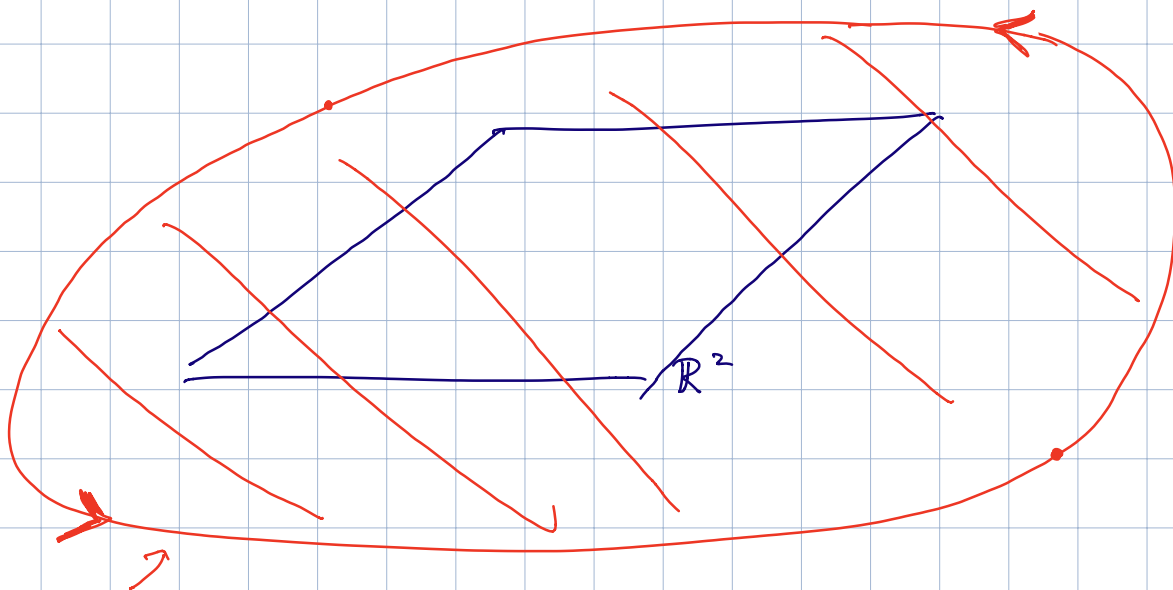
pti di  $\mathbb{R}^n$  molto vicini a  
 questa in  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  sono  
 quelli ottenuti intersecando  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$   
 con rette pochissimo  
 inclinate vicino a  $\text{per } 0$



Dunque:

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m \cup \underbrace{\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})}_{\substack{\text{i punti all'inf. di } \mathbb{R}^m \\ \text{dati dalle direzioni} \\ \text{(senza verso) delle rette} \\ \text{affini in } \mathbb{R}^m}}$$

Reinterpretato  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :



→  
direzioni e versi  
delle rette in  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \left( \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \right) / \sim \quad = \text{le rette in } \mathbb{C}^n$$

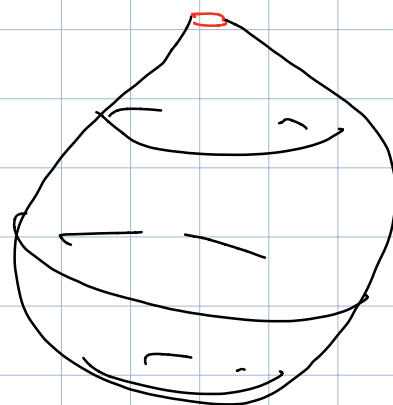
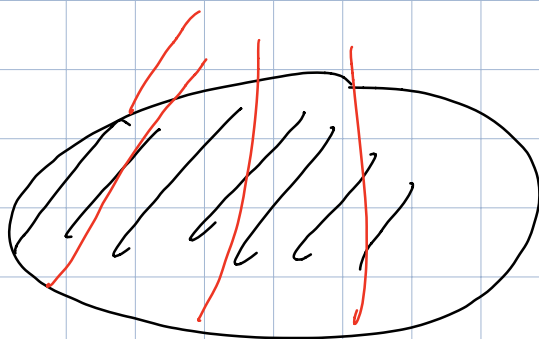
$z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w, \lambda \neq 0$

(complesse)

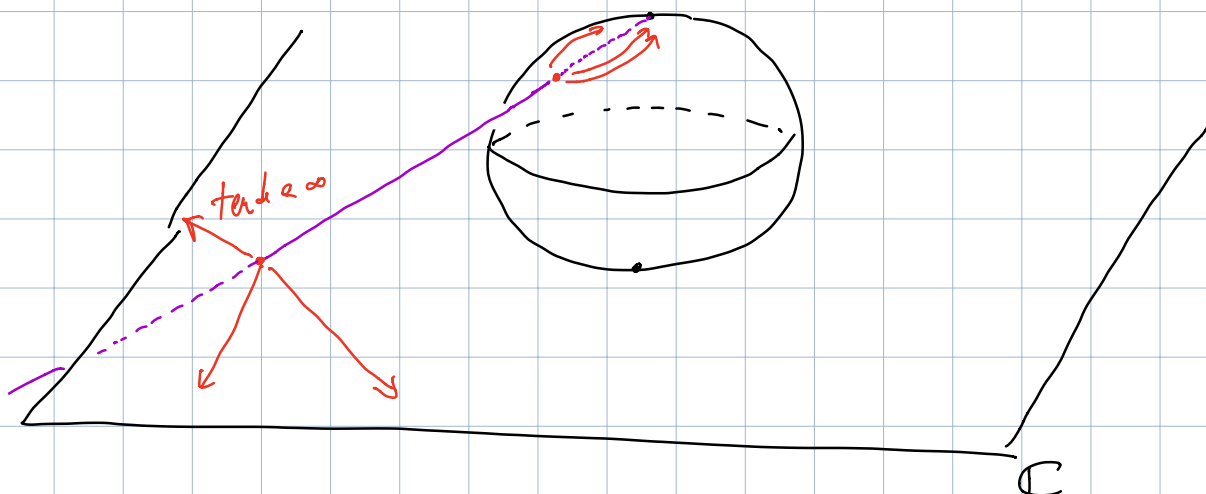
Come sopra

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

unico pto all'infinito



$$= \mathbb{D}^2$$



$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left( \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \right) / \sim$$

$x \sim y \text{ se } y = \lambda \cdot x$

Notazione: indico la classe di equivalenza  $[x]$  di  $x$  con  
 $[x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}]$  coordinate omogenee

Ragione: individualmente  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  non hanno  
significato, ma  $x_i/x_j$  se  $x_j \neq 0$ :

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) [1 : \sqrt{3} : -\sqrt{6}] = [-7 : -7\sqrt{3} : 7\sqrt{6}] \\ = [\sqrt{2} : \sqrt{6} : -2\sqrt{3}]$$

Prop: se  $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  è omogeneo  
(somma di monomi tutti dello stesso grado) allora  
 $\mathcal{L} = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : p(x) = 0\}$   
è ben definito.

Ben definito: uso un rappresentante per  $[x]$  ma  
il fatto che l'eq. sia verificata non dipende da  $x$ .

Es:  $p(x, y) = x - y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$

$$\mathcal{L} = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : p(x, y) = 0\} \quad \underline{\text{ha senso?}}$$

$$[1:1] : 1 - 1^2 = 0 \quad \underline{\underline{\text{SÌ}}}$$

$\parallel$

$$[2:2] : 2 - 2^2 \neq 0 \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$\uparrow$   
**NO!**

Dico: se  $[y] = [\lambda x]$  ho  $y = \lambda x$  dunque  
 $p(y) = p(\lambda x) = \lambda^2 \cdot p(x) = 0$ .  $\square$

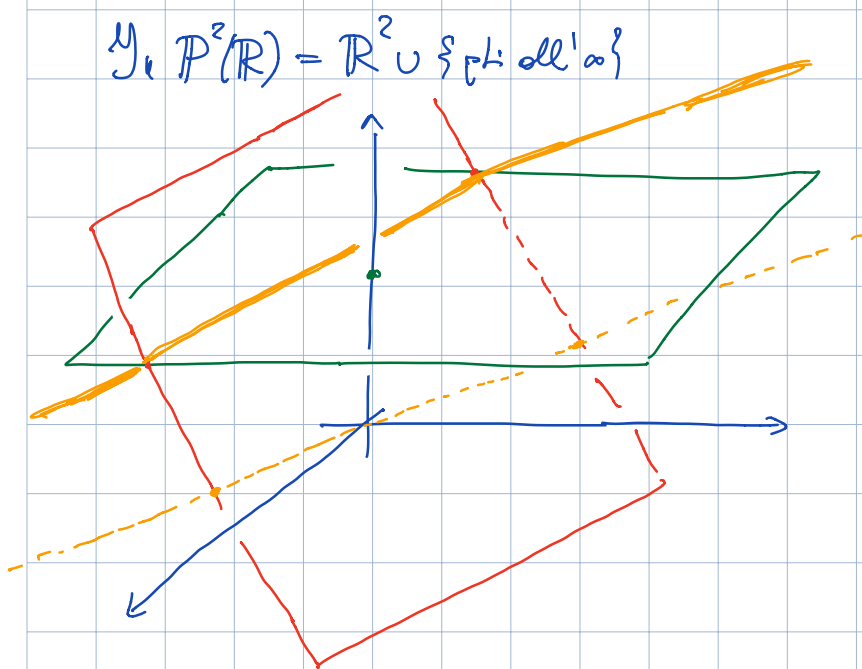
Es:  $\{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 7x^2y - 11z^3 + \sqrt{7} \cdot xyz - \pi \cdot xz^2 = 0\}$

Def: chiamo sottospazio proiettivo un luogo di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$   
 definito da equazioni omogenee di grado 1  
 = immagine in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  di un sottosp. rett. di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Se  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è proiezione di  $W \setminus \{0\}$  con  $\dim(W) = k$ , posso dire  $\dim(X) = k-1$

Oss: in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ho sottosp. proiettivi

- $\dim = 0$  punti (ciascuno ok)
- $\dim = 1$  rette
- $\dim = 2$  tutto.



$\mathbb{Y}_1 \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{pti all' } \infty\}$

Rette di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

proiettiva è proiezione  
 di  $W \setminus \{0\}$  con  
 $W \subset \mathbb{R}^3$  piano.

•  $W = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

$\Rightarrow l = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

le rette all'  $\infty$

•  $W \neq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

retta affine in  $\mathbb{R}^2$   
 $\cup$  il suo pt a  $\infty$

Prop: due rette di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  distinte hanno <sup>esattamente</sup> un pto in com.

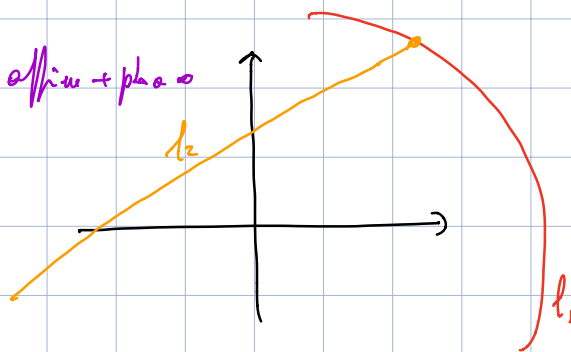
Dimo:  $l_1 = \text{proiez. di } W_1 \setminus \{0\}$       $\dim W_1 = 2$   
 $l_2 = \text{proiez. di } W_2 \setminus \{0\}$       $\dim W_2 = 2$       $W_1 \neq W_2$

$$W_1 \cap W_2 = U \quad \dim(U) = 1$$

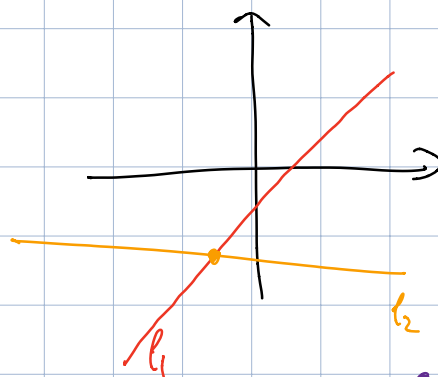
$l_1 \cap l_2 = \text{il pnto rappresent. da } U$



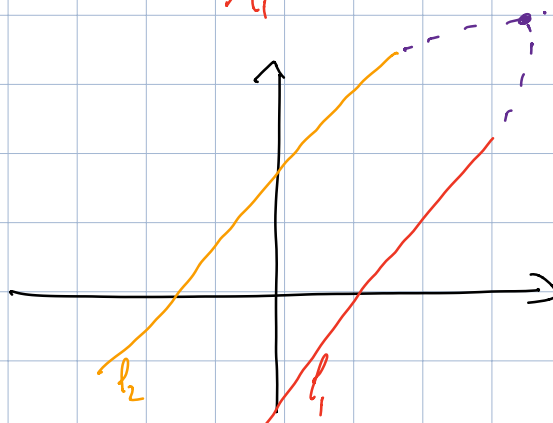
Casi: •  $l_1 = \text{retta all' } \infty$ ,  $l_2$  affini + pto  $\infty$



•  $l_1, l_2$  affini con pto. a  $\infty$   
 si intersecano al pnto



si intersecano all'  $\infty$



## Cambi di coordinate

$$\mathbb{R}^n \text{ affini} \quad x \mapsto N \cdot x + v \quad N \in \mathcal{M}_{n \times n}, \det(N) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \quad [x] \mapsto [M \cdot x] \quad M \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}, \det(M) \neq 0.$$

$$\text{Pao}^- : \mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Q: quali cambi di coord. proiettivi preservano  
la parte affine?

Già avviene per  $M \Leftrightarrow M$  preserva la parte all'inf.  
 $\Leftrightarrow M$  manda pt. con ultima coord. nulla  
in pt. dello stesso tipo.

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} N & v \\ u & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N & v \\ u & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} N \cdot x \\ u \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \quad \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{non}$$

con  $\det(N) \neq 0, c \neq 0$

$$[M \cdot x] = \left[ \frac{1}{c} M \cdot x \right]$$

$$\frac{1}{c} \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \cdot N & \frac{1}{c} \cdot v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} N' & r' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ .

I cambi di coord. proiettivi che preservano la parte affine  $\mathbb{R}^n$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  sono i cambi di coord. affini.

Ricordo: una eq. di II grado in  $n$  variabili si scrive

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} Q & l \\ l^t & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}^{\text{sim.}}$$

Una eq. di II grado omogenea in  $n+1$  variabili si scrive

$${}^t y \cdot A \cdot y = 0 \quad A \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}^{\text{sim.}}$$

Es:  $7x^2 - 5xy + 9y^2 + 4x - 13y + \sqrt{2} = 0$

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

aggiungo  $z$  ai termini dove manca grado

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5/2 & 2 \\ -5/2 & 9 & -13/2 \\ 2 & -13/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

pongo  $z=1$

$$7x^2 - 5xy + 9y^2 + 4xz - 13yz + \sqrt{2}z^2 = 0$$

$${}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$