Geom - Civile - 14/4/21

Spazi proiettivi

X insieme; **relazione** è $R \subset X \times X$, che scriviamo come xRy invece che $(x,y) \in R$.

Es: $X = \mathbb{R}$, $R = \text{"}\leq\text{"}$ $\qquad 7.5 \leq \sqrt{137}$

~~$(7.5, \sqrt{137}) \in \leq$~~

Proprietà: R si dice

- riflessiva se $xRx \quad \forall x \in X$
- simmetrica se $xRy \Rightarrow yRx$
- transitiva se $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$
- di equivalenza se è rifl. simm. transitiva
- antisimmetrica se xRy e $yRx \Rightarrow x = y$
- di ordine se è riflessiva, antisimmetrica, transitiva.

Esempi principe $X = \mathbb{R}$

$=$ è equivalenza: $\qquad x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = y \Rightarrow y = x$

$x = y,\ y = z \Rightarrow x = z$

$\leq$ è ordine $\qquad x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Altri esempi di relazioni di equivalenza:

- X = noi oggi ; I = avere stesse iniziale del nome

  rifl ; simm ; trans.

  H = stesse altezze in cm ...

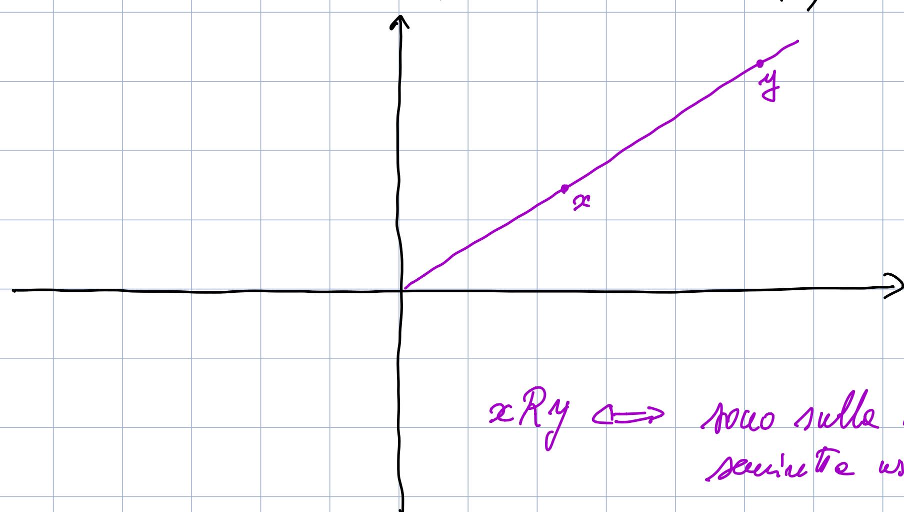
- $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$; $x R y$ se $\exists\, \lambda > 0$ t.c. $y = \lambda x$

  rifl: $x = 1 \cdot x$ $\quad 1 > 0$

  simm: $y = \lambda \cdot x \Longrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \cdot y$ $\quad \lambda > 0 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} > 0$

  trans: $y = \lambda \cdot x$, $z = \mu \cdot y$ $\Longrightarrow z = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$

  $\lambda > 0$ $\quad \mu > 0$ $\quad \lambda \cdot \mu > 0$



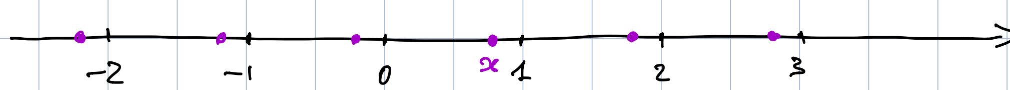
$x R y \iff$ sono sulla stessa semiretta uscente da O

- $X = \mathbb{R}$, $x R y$ se $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = x + n$

  rifl $\quad x = x + 0$

  simm $\quad y = x + n \Longrightarrow x = y - n$

  trans $\quad y = x + n$, $z = y + m \Longrightarrow z = x + (n + m)$



Ricordo: parte intera di x è $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

$[1.903] = [1]$ $\quad [-4.6] = -5$

parte frazionaria $\{x\} = x - [x]$

$\{1.903\} = 0.903$ $\quad \{-4.6\} = 0.4$

xRy se hanno la stessa parte frazionaria

Def: se R è una relazione di equivalenza su X chiamo classe di equivalenza di x

$$[x] = \{y \in X : xRy\}.$$

Es: $X =$ "noi" $\quad R =$ stesse iniziale

[Carlo Petrarolo] = {Carlo Petroni, Consolata Jolge Tour}

[Daniele] = {Daniele}

[Sofia] = {Samuele, Silvia, Simone, Sofia}

Es: $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\quad xRy$ se $y = \lambda \cdot x \quad \lambda > 0$

$[x] =$ la semiretta uscente da 0 passante per x

Prop: le classi di equiv. sono una <u>partizione</u> di X, cioè

- la loro unione è tutto X
- due di loro o coincidono o sono disgiunte.

Dim: $x \in [x] \implies$ unione è X;

se $[x] \cap [y] \ni z$ allora xRz, yRz

$$yRz \overset{\text{simm}}{\Rightarrow} zRy$$

$$yRx \overset{\text{simm}}{\Leftarrow} xRy \overset{\text{trans}}{\Leftarrow} xRz,\ zRy$$

se $w \in [x]$ ho xRw ma $yRx \Rightarrow yRw \Rightarrow w \in [y]$

$$\Rightarrow [x] \subseteq [y]$$

se $w \in [y]$ ho yRw e $xRy \Rightarrow xRw \Rightarrow w \in [x]$

$$\Rightarrow [y] \subset [x]. \quad \blacksquare$$

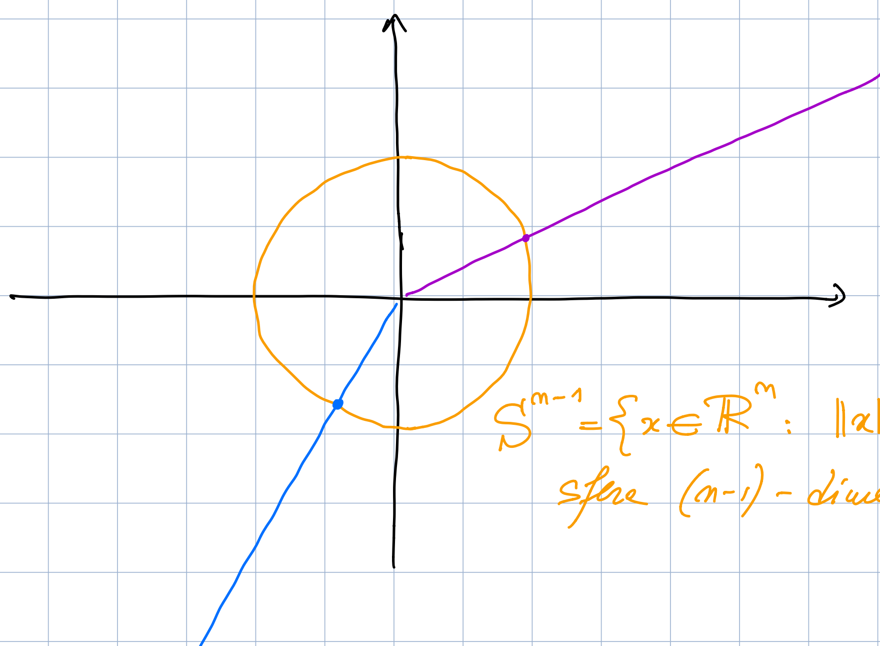
Def: chiamo insieme quoziente di X rispetto a equiv. R

$$X/_R = \text{l'insieme delle classi di equivalenza.}$$

legge "X modulo R"

Come descrivere un insieme quoziente?

Es: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; xRy se $y = \lambda \cdot x$ $\lambda > 0$.



$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

sfera $(n-1)$-dimensionale

Chiamo insieme di rappresentanti per R su X una scelta di un elemento per ogni classe di equivalenza.

Oss: "insieme di rappresentanti" $\longleftrightarrow X/_R$

Es: $X =$ "noi" $\quad R =$ "stesse iniziale nome"

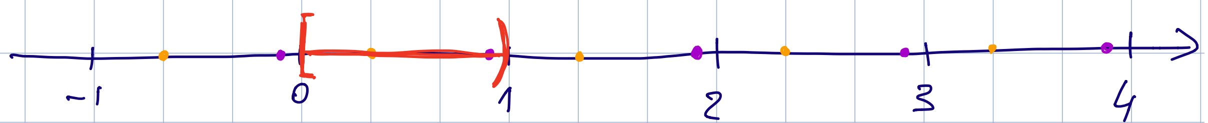
$X/R \longleftrightarrow \{$Alberto, Cristiano, Daniele, Elena, Filippo, ...$\}$

poco naturale

Invece: scelgo nomi per le classi

$X/R \longleftrightarrow \{A, C, D, E, F, G, \dots\}$

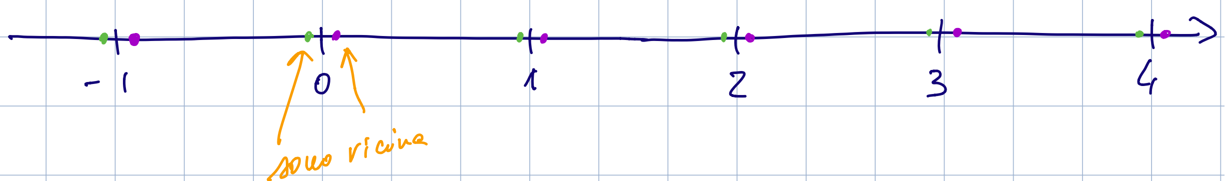
Es: $X = \mathbb{R}$, xRy se $y = x + n \quad n \in \mathbb{Z}$.

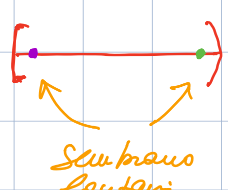


nome = parte frazionaria $=$ $[0,1)$

$=$ insieme di rappresentanti.

$X/R \longleftrightarrow [0,1)$

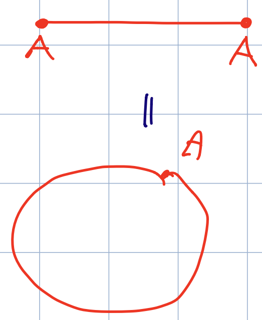




$\Longrightarrow$ $[0,1)$ è poco adatto a descrivere quoziente

Soluzione: prendo insieme di rappresentanti sovrabbondante $[0,1]$ ma ricordo quelli che coincidono nel quoziente.

$\mathbb{R}/_{\text{diff. intere}} \longleftrightarrow [0,1]/_{0=1} \longleftrightarrow$



Def: chiamo spazio proiettivo n-dimensionale reale

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/_{xRy}$$

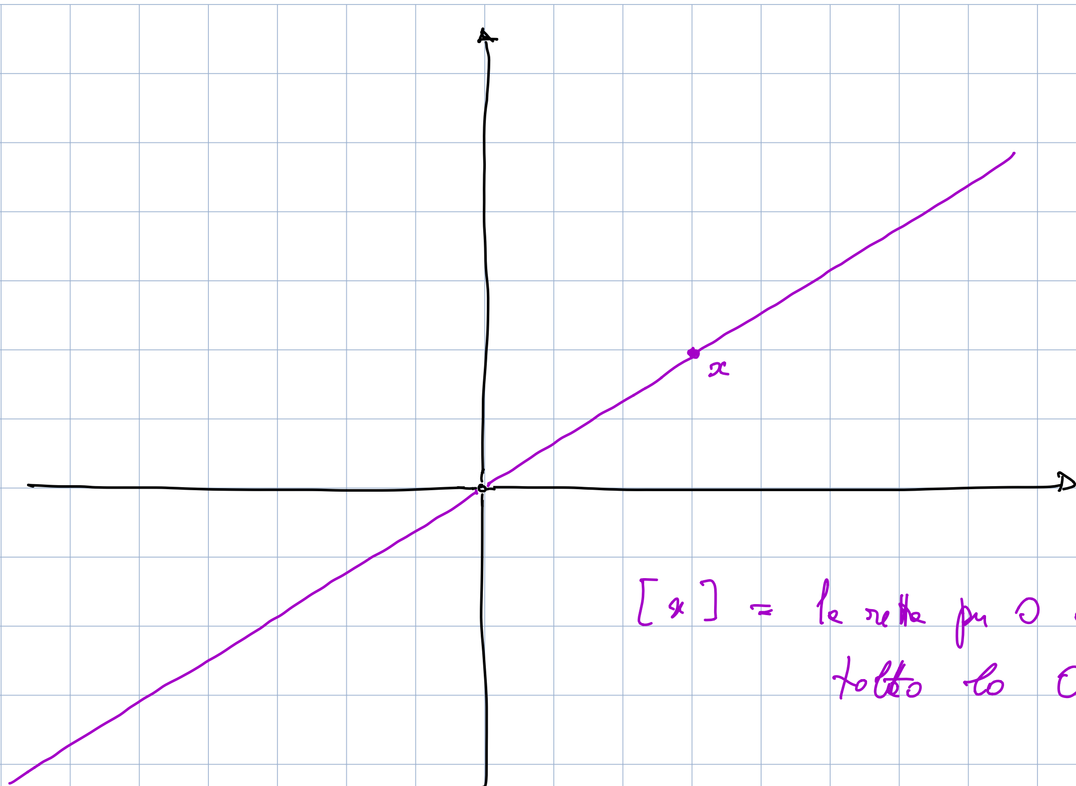
se $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c. $y = \lambda \cdot x$

equiv: rifl. simm. trans. ✓

Oss: 1. chiedere $\lambda \neq 0$ è superfluo poiché $y \neq 0$

2. prendendo $\mathbb{R}^{n+1}$ e accettando $\lambda = 0$ avrei $xR0$ $\forall x$ ma $0Rx$ solo per $x=0$ dunque non sarebbe equivalenza

3. prendendo $\mathbb{R}^{n+1}$ ma non accettando $\lambda = 0$ avrei $[0] = 0$

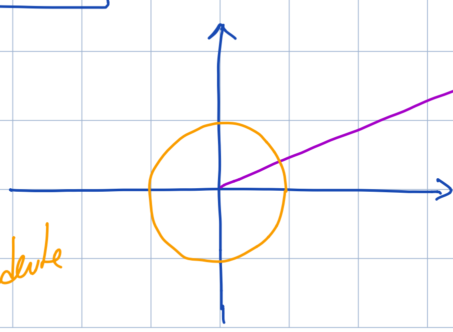


$[x]$ = la retta per O e x
tolto lo O

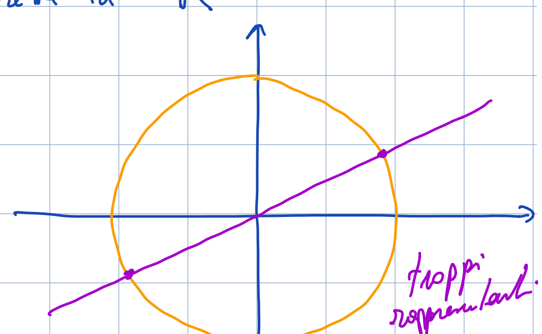
$\Longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette per 0 in $\mathbb{R}^{n+1}$ private di 0
= l'insieme delle rette per O in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\boxed{\mathbb{P}^0(\mathbb{R})}$ = l'insieme delle rette nella retta $\mathbb{R}$
= un punto.

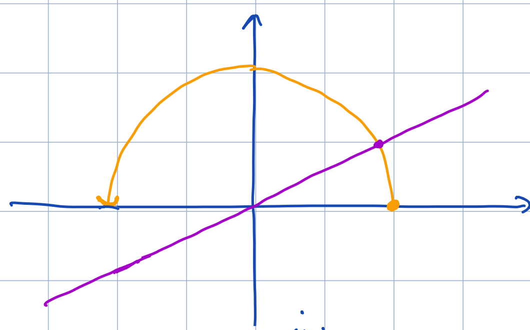
$\boxed{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ = l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^2$

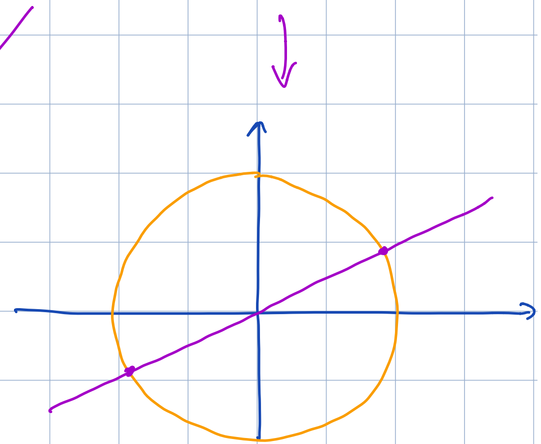


caso precedente



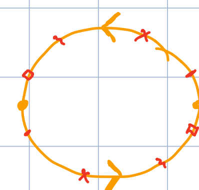
troppi rappresentanti.





insieme di rappresentanti

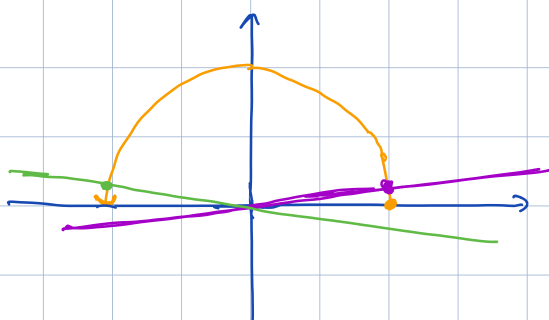
$\Downarrow$

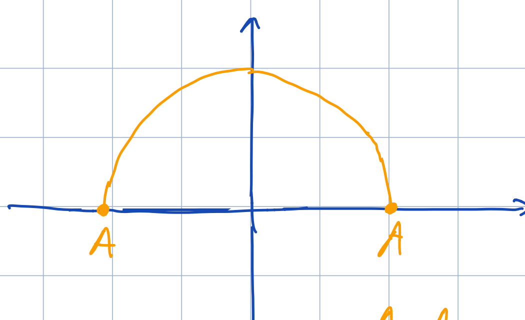
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ 

$=$ circonferenza con punti antipodali identificati

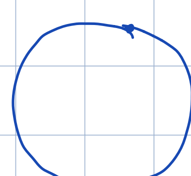
$=$ circonferenza

ma...



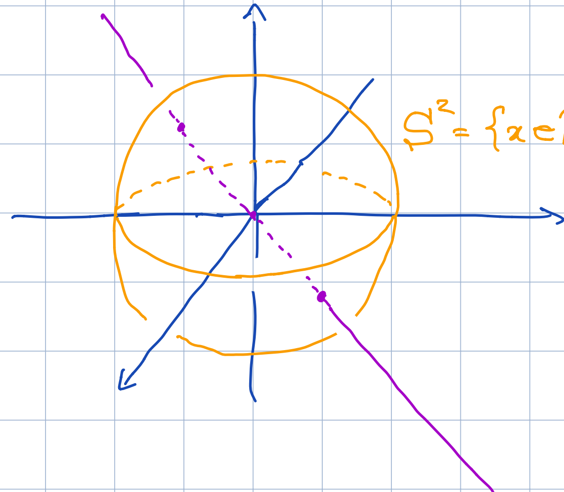


$A = A =$ asse x

$\to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ 

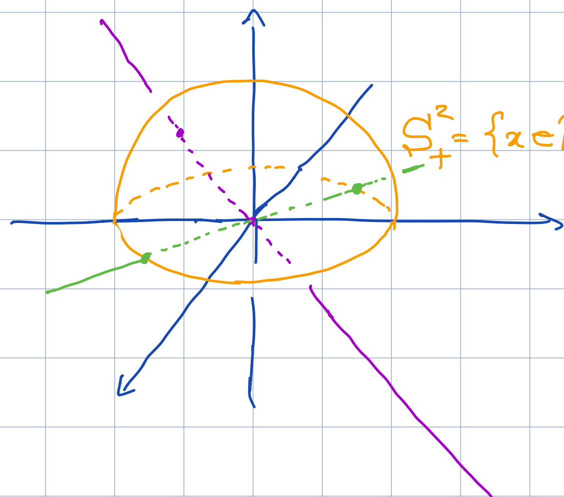
"retta proiettiva reale = circonferenza"

$\boxed{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$ piano proiettivo reale = rette in $\mathbb{R}^3$



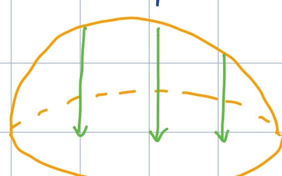
$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$

due rappresentanti per ogni classe di equiv.



$S^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 ,\ x_3 \geq 0\}$

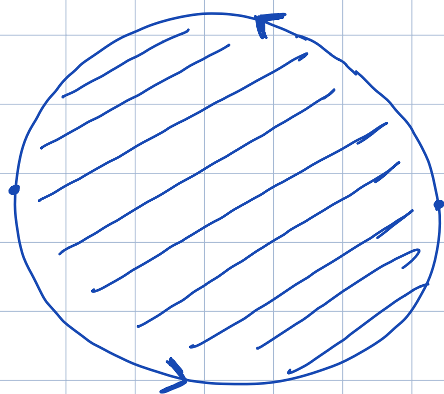
$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2_+ \Big/$ identificare i pti antipodali sull'equatore di bordo

Oss: $S^2_+ =$  $\longleftrightarrow D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$

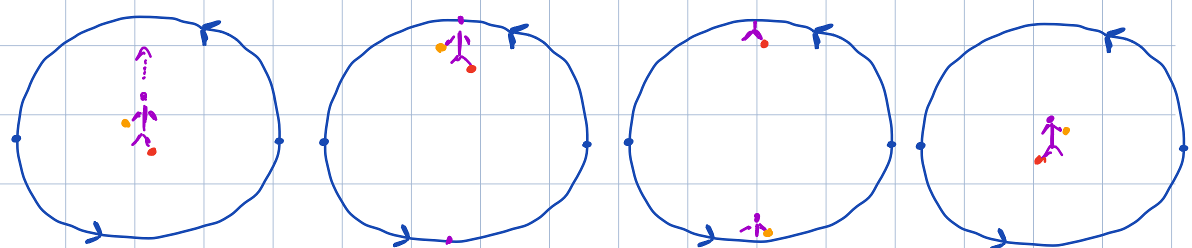
disco nel piano

Oss: facendo tale corrispondenza l'equatore di bordo non si muove

$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$

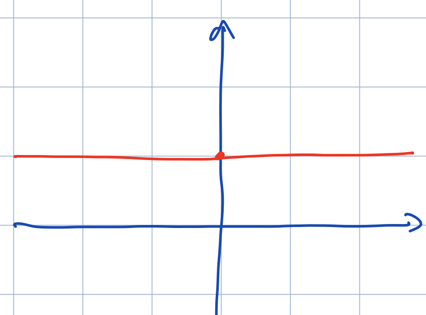


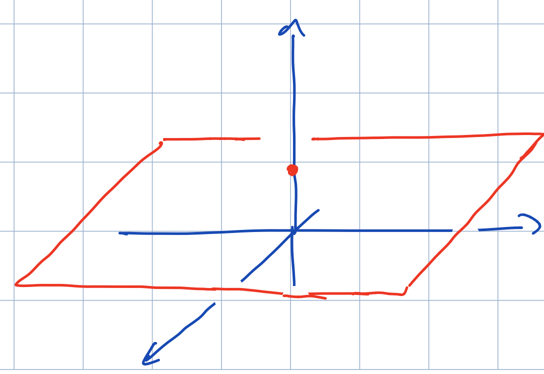
disco nel piano con pti antipodali di bordo identificati



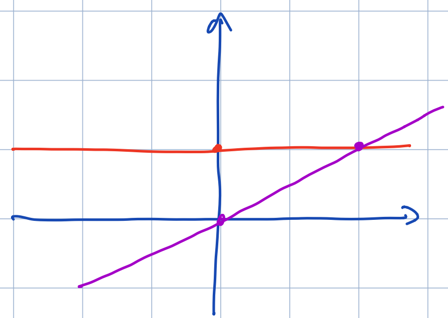
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$

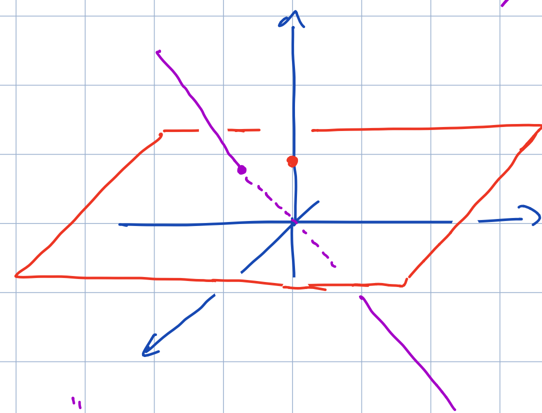
Considero in $\mathbb{R}^{n+1}$ l'insieme $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ iperpiano affine orizzontale





Oss: "quasi tutte le rette in $\mathbb{R}^{n+1}$ lo intersecano in un solo p.to"



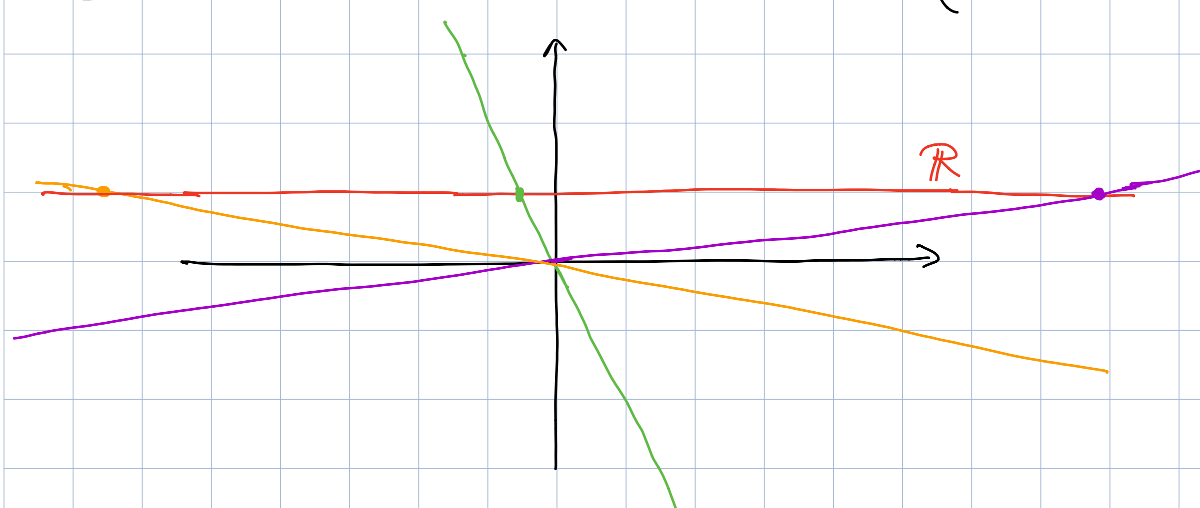


$\Rightarrow$ insieme di rappresentanti "scarso": mancano rette orizzontali, cioè quelle contenute in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \underbrace{\left(\mathbb{R}^n \times \{1\}\right)}_{\parallel\ \mathbb{R}^n} \cup \underbrace{\Big(\text{rette in } \underbrace{\mathbb{R}^n \times \{0\}}_{\mathbb{R}^n}\Big)}_{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

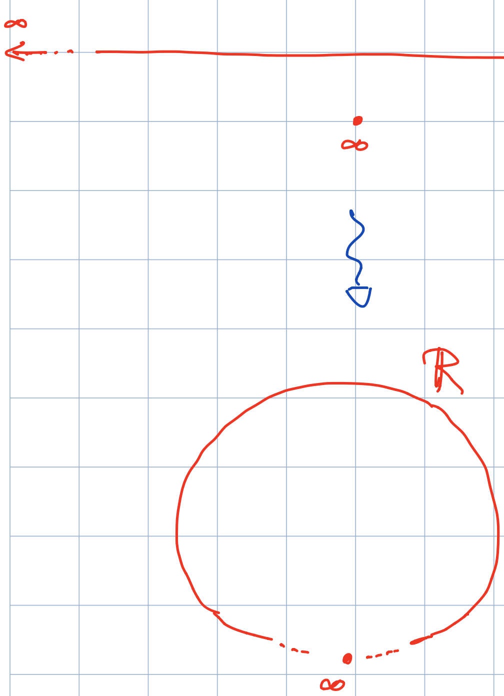
$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$\underline{n = 1}$ $\quad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\text{un p.to}\}$ $\quad$ ($=$ circonf.



I pti di $\mathbb{R}$ vicini a quello mancante sono quelli "molto lontani"
(sia a sx sia a dx)

Dunque: pto lo chiamo ∞



$\Longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$