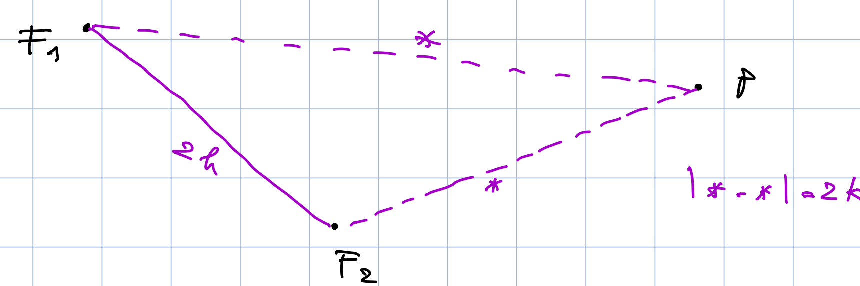
Geom - Civili 8/4/21

Iperbole: $F_1 \neq F_2 \in \mathbb{R}^2$ $\quad k \quad k<h \quad 2h = d(F_1,F_2)$

$$\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2k\}$$



Equazione canonica metrica:

A meno di isom. $\quad F_1 = (-h,0) \quad F_2 = (h,0)$

$$\binom{x}{y} \in \mathcal{I} \iff \left|\sqrt{(x-h)^2+y^2} - \sqrt{(x+h)^2+y^2}\right| = 2k$$

$$\sqrt{(x-h)^2+y^2} = \pm 2k - \sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 \mp 4k\sqrt{(x+h)^2+y^2} + \cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

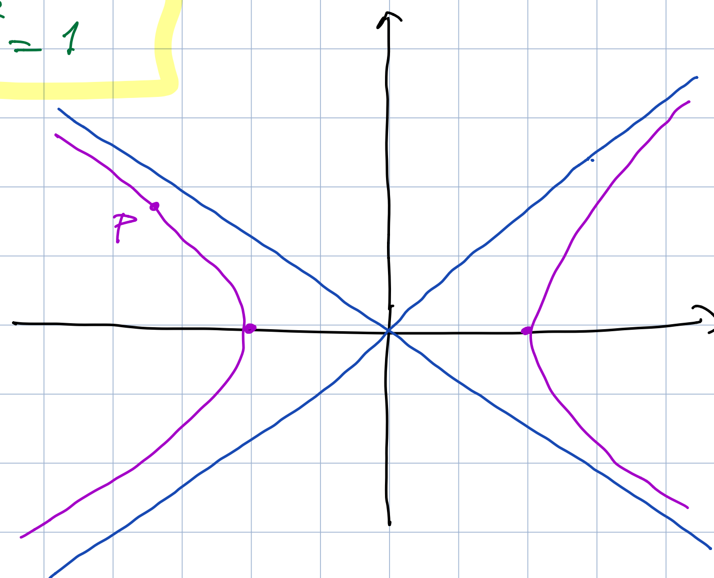
$$\cancel{4}k^2 + \cancel{4}xh = \pm \cancel{4}k\sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\dots \quad (k^2-h^2) + k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{\ell^2 - k^2} = 1$$

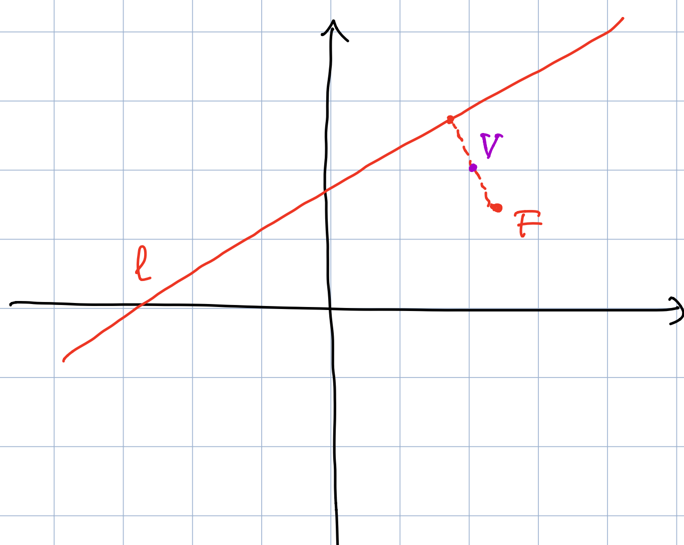
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

<u>Fatto</u>: con gli elem. al □ non ho aggiunto punti



<u>Parabola</u>: $F \subset \mathbb{R}^2$, $\ell \subset \mathbb{R}^2$ retta $F \notin \ell$

$$\mathcal{P} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) = d(P,\ell) \}$$

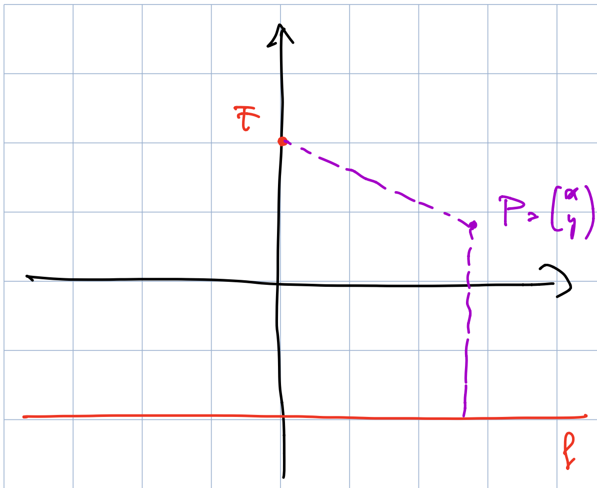


Equazione canonica metrica:

- trasliamo V in O
- ruotiamo finché

$\ell : \; y = -h$

$F = (0,h)$



$P \in \mathcal{P} \iff$

$$\sqrt{x^2+(y-h)^2} = |y+h|$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2hy + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2hy + h^2$$

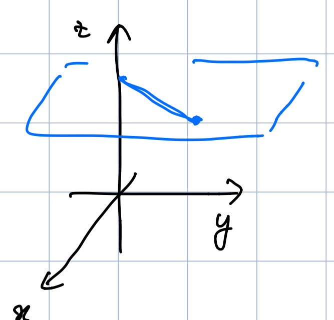
$$y = \frac{1}{4h}x^2$$

$$y = ax^2$$

Eq. canoniche metriche delle <u>coniche</u> <u>non degeneri</u>

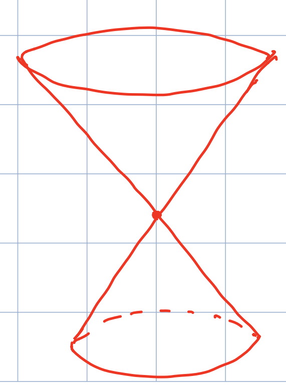
ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ parabola $y=ax^2$

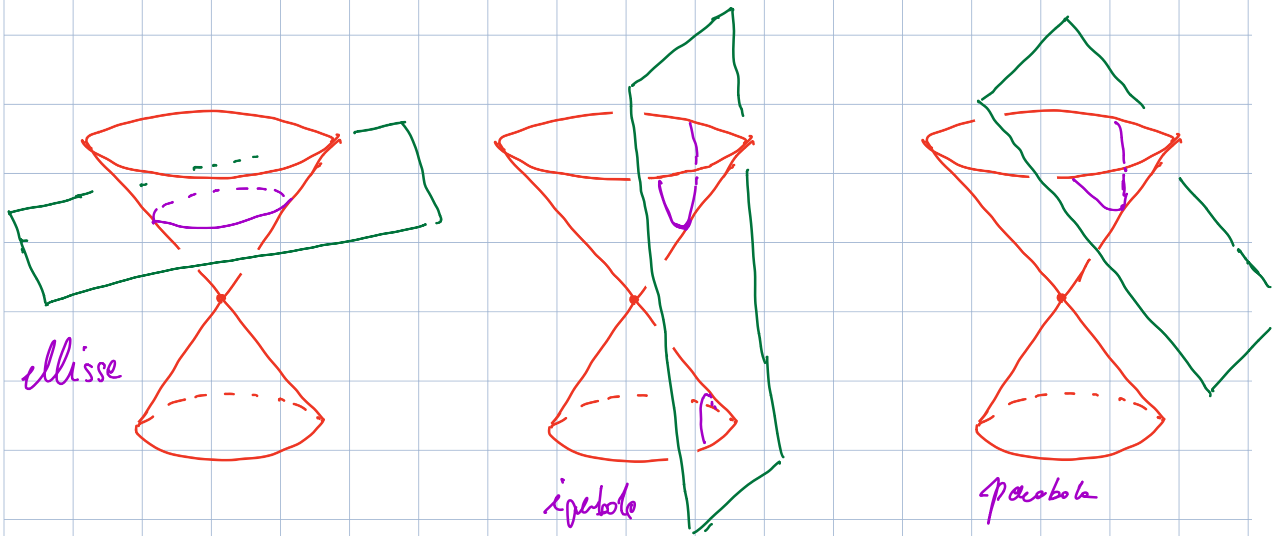
$$C_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{\to\, d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ asse } z\right)^2} = z^2\}$$

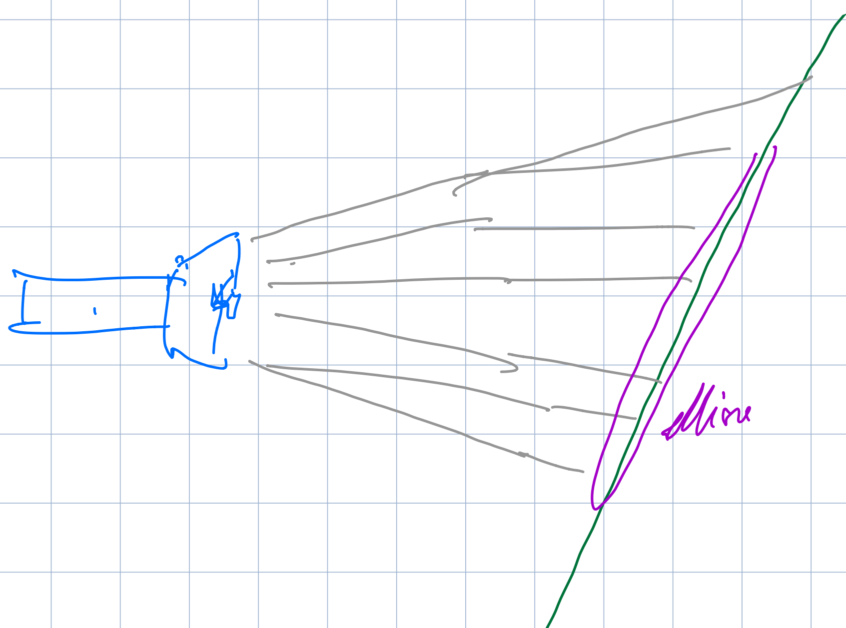


Poiché per $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nell'equazione compaiono x, y solo nell'espressione x^2+y^2 ho che C_1 è mandato in sé stesso da qualsiasi rotazione attorno asse z

$\Rightarrow C_1$ = "superficie" di rotazione







Equazioni metriche $\quad \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = ax^2$

$X = \dfrac{x}{a}, \; Y = \dfrac{y}{b} \qquad\qquad X = x, \; Y = y/a$

cambi coord. affini $\qquad X^2 \pm Y^2 = 1 \qquad Y = X^2$

Equazioni delle coniche a meno di cambi di coord. affini:

$x^2+y^2=1$	$x^2-y^2=1$	$y=x^2$	$x^2+y^2+1=0$
ell.	ip.	par.	$\emptyset$

Sono luoghi geometrici in $\mathbb{R}^2$ descritti da eq. di II grado nelle coordinate.

Q: che tipo di luogo in $\mathbb{R}^2$ è descritto da una qualsiasi eq. di II grado nelle coordinate?

$$\alpha\cdot x^2+\beta\cdot xy+\gamma\cdot y^2+\delta\cdot \underset{\cdot z}{x}+\varepsilon\cdot \underset{\cdot z}{y}+\underset{\cdot z^2}{\varphi}=0$$

Riscrittura matriciale :

già visto: $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2 = {}^t\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ \cancel{1}\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta/2 & \delta/2 \\ \beta/2 & \gamma & \varepsilon/2 \\ \delta/2 & \varepsilon/2 & \varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ \cancel{1}\ z\end{pmatrix}=0$$

Q: partendo da un'equazione ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1\end{pmatrix}=0$
$A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ simmetrica, come posso ottenere un'equazione più facile tramite trasf. affini?

Limitazione: considero solo A con $\det(A) \neq 0$
e chiamo $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$
conica non degenere se ciò accade.

Fatto: ogni conica non degenere è una ellisse o iperbole o parabola o $\emptyset$

esiste una trasformazione affine del piano che trasforma il luogo in uno dei 4 affini delle equazioni canoniche
$x^2+y^2=1$
$x^2-y^2=1$
$y=x^2$
$x^2+y^2+1=0$

dunque: • se l'equaz. trovata è $x^2+y^2=1$, il luogo è una ellisse metrica come sopra descritto
• se $x^2-y^2=1$ ... è ... iperbole ....
• ...
• ....

In $\mathbb{R}^n$ una equazione di II grado nelle coordinate si scrive, come sopra, come

già visto: se omogenee II grado: ${}^t x \cdot Q \cdot x = 0$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}) \text{ simmetrica}$$

Es: $7x^2 - 5y^2 + 4z^2 + 3xy + 2xz - 9yz$

$+ 16x - 13y + \sqrt{3}z + \pi = 0$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3/2 & 1 & 8 \\ 3/2 & -5 & -9/2 & -13/2 \\ 1 & -9/2 & 4 & \sqrt{3}/2 \\ 8 & -13/2 & \sqrt{3}/2 & \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

Notazione: ${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^tl & c \end{pmatrix}$

${}^tx \cdot Q \cdot x + 2 \cdot {}^tl \cdot x + c = 0$ $\qquad Q$ = parte quadratica

Cambi di coord. affini $\quad x \longmapsto N \cdot x + v$

Oss: devo avere $\det N \neq 0$

oppure $\quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

Oss: ho $\det(M) \neq 0$

Effetto di tali cambi di coord. sulla matrice di una equazione:

$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^tl & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^tl & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

Se opero il cambio di coord. affine

$$ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} $$

la nuova equazione è

$$ {}^t\left(M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot A \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad {}^t\left(\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^tl & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 $$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tM \cdot A \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A' = {}^tM \cdot A \cdot M$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tN & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tN & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QN & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tN \cdot Q \cdot N & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Q' = {}^tN \cdot Q \cdot N$$

Visto: se all'equazione associata a una matrice $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$ applico una trasf. affine, la matrice della nuova equazione è $A' = \begin{pmatrix} Q' & \ell' \\ {}^t\ell' & c' \end{pmatrix}$ con

$$A' = {}^tM \cdot A \cdot M \qquad\qquad Q' = {}^tN \cdot Q \cdot N$$
$$\det(M) \neq 0 \qquad\qquad \det(N) \neq 0$$

Oss: applicando trasformazioni siffatte i segni degli autovalori di A e Q non cambiano. Ragione:

$\#$ autoval positivi di $T \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ sono

$= \max\{p : \exists$ sttsp. W di $\mathbb{R}^k$ di dim $= p$ con $\langle x | x \rangle_T > 0 \ \ \forall x \in W \setminus \{0\}\}$

$\Rightarrow$ se sostituisco T con ${}^tB \cdot T \cdot B$ con $\det(B) \neq 0$ tale max è invariato.

Oss: il luogo di equaz. ${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
con $A = \begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix}$ coincide con quello di equaz.
${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (k \cdot A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot Q & * \\ * & * \end{pmatrix}$ $\quad k \neq 0$

Dunque posso sostituire A, Q con
$A' = k \cdot A$, $Q' = k \cdot Q$.

In tal caso tutti gli autovalori cambiano segno se $k<0$, altrimenti restano gli stessi.

Dunque: tramite trasf. affini e molt. per scalari gli autoval. di A e di Q restano gli stessi o cambiano tutti insieme.

Teo (classificazione affine delle coniche non degeneri):

il luogo di equaz. ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ se $\det(A) \neq 0$ è, posto $d_j = \det$ angolo $j \times j$ in alto a sinistra,

- $\emptyset$ se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
- ellisse se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$

$\Big\}$ $d_3 = \det(A)$

- iperbole se $d_2 < 0$
- parabola se $d_2 = 0$.

$\Big\}$ ATT: bisogna sempre verificare che $d_3 \neq 0$

Esempi: • $4x^2 - 5xy + 7y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5/2 & -1 \\ -5/2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 4 > 0$

$d_2 = 28 - \frac{25}{4} > 0$

$d_3 = 84 + 5 + 5 - 7 - \frac{75}{4} - 16 > 0$

$\Longrightarrow \emptyset$

• $2x^2 + 7xy + y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7/2 & -5/2 \\ 7/2 & 1 & 2 \\ -5/2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 2 > 0$

$d_2 = 2 - \frac{49}{4} < 0$

$d_3 = -2 - \frac{35}{2} - \frac{35}{2} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} - 8$

$= -2 - 35 + \frac{37}{2} - 8 \neq 0$

$\Longrightarrow$ iperbole

• $3x^2 - 12xy + 12y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 3 > 0$

$d_2 = 36 - 36 = 0$

$d_3 = 36 + 12 + 12 - 12 - 36 - 12 = 0$

NON posso concludere che è parabola

(cambiando termine noto se $d_3 \neq 0$ sì)

Dim: casi enunciato:

1) $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$
2) $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$
3) $d_2 < 0$
4) $d_2 = 0$

Casi possibili per autoval di Q e A

1) Q concordi, A concordi con quelli di Q
2) Q concordi, A due concordi con Q, altro no
3) Q discordi
4) Q uno nullo e l'altro no

Fatto A: i casi 1-4 per gli autoval di Q / A sono tutti:

- Q escludere entrambi nulli: $Q = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 0 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 & c \end{pmatrix}$$

ma tale A ha $\det = 0$. ok

- se autoval Q concordi, devo vedere che A ne ha due concordi con quelli di Q: i segni sono dati da d_1, $d_2/d_1 \sim d_1$ $(d_2 > 0)$ sia per Q sia per A.

Fatto B: i casi si corrispondono. ✓

Fatto C (conclusione): nei diversi casi per gli autoval posso ricondurmi tramite trasf affini / molt. per scalari a una delle equazioni modello.

$d_2 \neq 0 \Rightarrow$ autoval $Q \neq 0 \Rightarrow \exists N \in M_{2\times 2}$ ortog. t.c.

$${}^tN \cdot Q \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_0 = {}^t\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 & \ell_0 \\ {}^t\ell_0 & c_0 \end{pmatrix}$$

Ora tuvelo: $A_0 \rightsquigarrow {}^t\begin{pmatrix} I & -Q_0^{-1}\ell_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} I & -Q_0^{-1}\ell_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

Equaz. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c_1 = 0$

divido per c_1 e opero omotetie e/o cambi segno su x, y

e trovo $x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0 \rightsquigarrow$ ell/ip/$\emptyset$

$\lambda_2 = 0$ stessi passaggi:

$$A \xrightarrow[\text{teo spettr.}]{} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{trasl}]{} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' \\ 0 & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{trasl.}]{} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b'' \\ 0 & b'' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{omotetia}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = x^2$ parabola. $\boxtimes$