Geom – Civ – 6/5/21

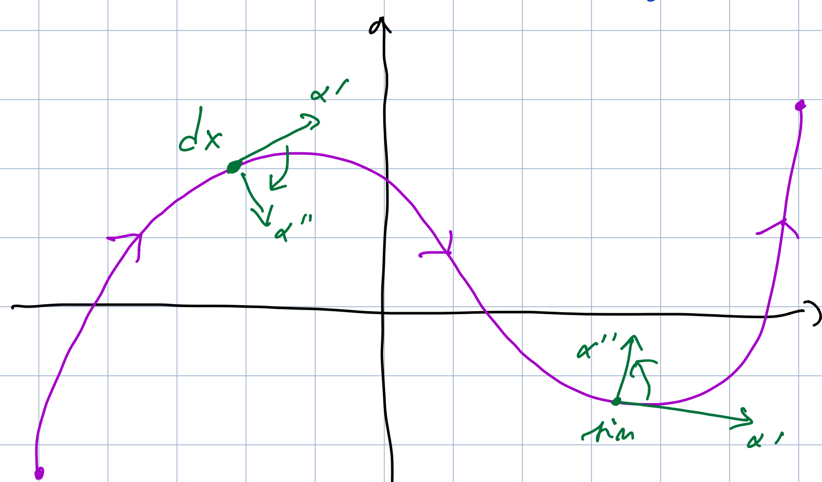
Esame : – sul mio sito le regole

– ditemi se qualcuno vuole farlo in presenza entro oggi!

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ in p.d'a. , nel punto $\alpha(t)$

la curvatura è $\|\alpha''(t)\| = 1/$raggio circonf. (osculatrice) con triplice contatto con α in $\alpha(t)$

in val. assoluto

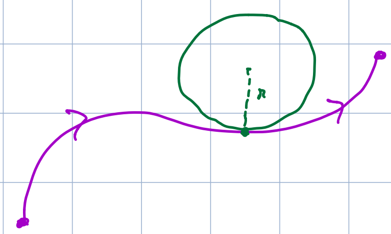


Per α orientata pongo $\mathcal{K}(t) = \pm \|\alpha''(t)\|$ curvatura con segno

+ sin $\det(\alpha', \alpha'') > 0$

– dx $\det(\alpha', \alpha'') < 0$

Q: data $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ so che esiste α in p.d.a.
$\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\beta = \alpha \circ \tau$ e pongo



curvatura di β in $\beta(s)$
$= \text{curvatura di } \alpha \text{ in } \alpha(\tau(s))$
$= \pm \| \alpha''(\tau(s)) \|$

Calcolo richiederebbe esplicitare τ : difficile

Però $\tau = \sigma^{-1}$ $\qquad \sigma(t) = \int_a^t \| \beta'(u) \| \, du$.

Dunque si riescono a calcolare le derivate di τ. Facendolo si ottiene:

Teo: la curvatura di $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ in $\beta(s)$ è

$$\frac{\det(\beta'(s), \beta''(s))}{\| \beta'(s) \|^3}$$

Oss: il segno è già quello giusto.

Oss: • deve comparire $\det(\beta', \beta'')$ che dà segno;
• deve esserci una normalizzazione che tiene conto che β' non è unitario
• potenza 3 sensata perché:

$$\gamma(u) = \beta(\lambda \cdot u)$$
$$\gamma'(u) = \lambda \cdot \beta'(\lambda \cdot u)$$
$$\gamma''(u) = \lambda^2 \cdot \beta''(\lambda \cdot u)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\det(\lambda\beta', \lambda^2\beta'')}{\|\lambda\cdot\beta'\|^3} = \frac{\cancel{\lambda^3}}{\cancel{\lambda^3}}\cdot\frac{\det(\beta',\beta'')}{\|\beta'\|^3}$$

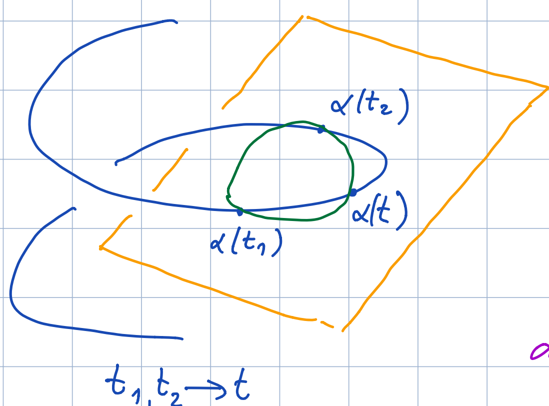
Oss: se ho $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\|\beta'(t_0)\| = 1$

non è vero che $\kappa(t_0) = \pm\|\beta''(t_0)\|$;

serve $\|\beta'(t)\| \equiv 1 \quad \forall t$.

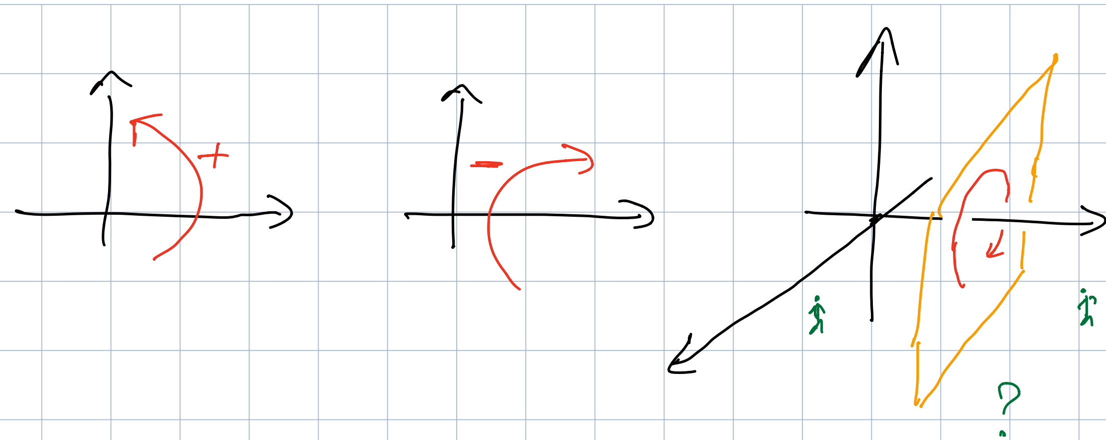
Curve nello spazio: $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ in p.d'a. $(\|\alpha'\| = 1)$.

curvatura: se $\alpha''(t) \neq 0$ esiste un unico piano (osculatore) che ha in t contatto triplice con α, e ha giacitura $\mathrm{Span}(\alpha'(t), \alpha''(t))$; esiste su tale piano una unica circonf. (osculatrice) che ha in t contatto triplice con α, e ha raggio $1/\|\alpha''(t)\|$

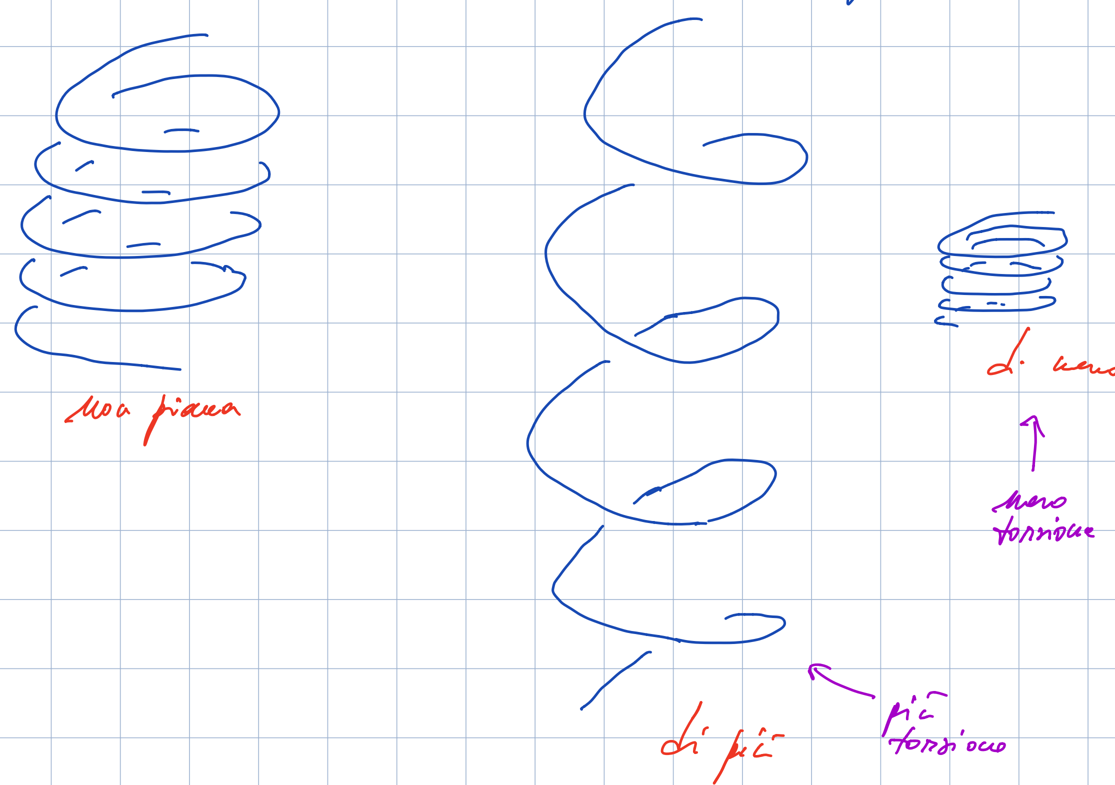


Poniamo $\kappa(t) = \|\alpha''(t)\|$.

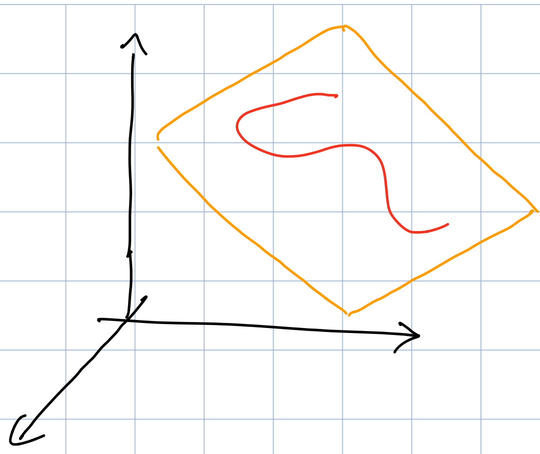
Oss: non ha senso dare segno.



Q: riusciamo a misurare quanto non è piana una curva?



Visto: in ogni punto c'è un unico piano su cui α giace con ordine almeno triplice; se è sempre lo stesso, la curva è piana:



Idea: la misura della non planarità è la variazione del piano osculatore.

Q: come tradurre ciò in derivazione?

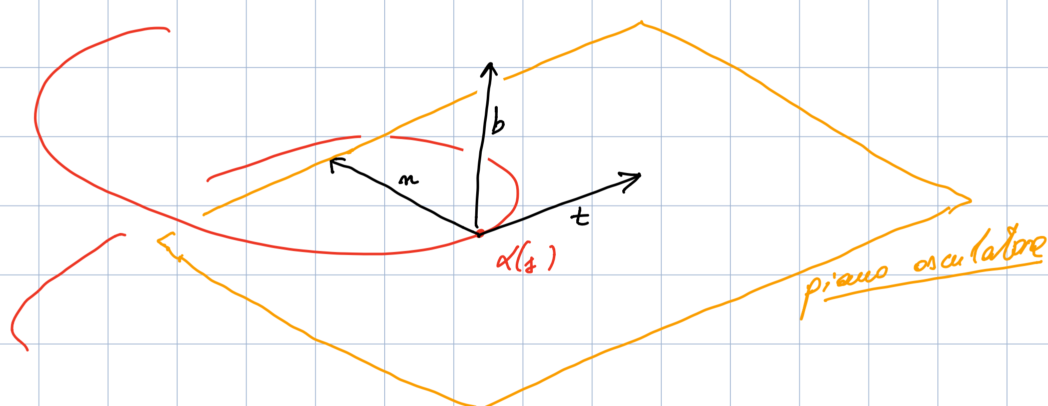
Per curve in $\mathbb{R}^3$ uso s (o altro, non t) per parametro.

Def: se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è curva in p.d'a. chiamo

$t(s) = \alpha'(s)$ vettore tangente in $\alpha(s)$

$n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ vettore normale in $\alpha(s)$

$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ vettore binormale in $\alpha(s)$



- (t,n,b) è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$

cioè $M = (t,n,b)$, ${}^tM \cdot M = I_3$, $\det(M) = +1$

(t, n, b) = riferimento di Frenet

• piano osculatore $= \mathrm{Span}(t, n) = b^{\perp}$

dunque b lo determina; dunque

"misura di non planarità" = "variazione di b"

<u>Teo</u>: esiste $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s)} \qquad \forall s \in [a,b].$$

Chiamo $\tau(s)$ <u>torsione</u> di α in $\alpha(s)$.

Inoltre
$$\boxed{n'(s) = -\kappa(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s)}$$
$$\boxed{t'(s) = \kappa(s) \cdot n(s)}$$

dunque per $M(s) = (t(s), n(s), b(s))$ ho

$$M'(s) = M(s) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

ok se provo le altre tre formule

$$(t', n', b') = (t, n, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} t' = \kappa \cdot n \ ✓ \\ n' = -\kappa \cdot t + \tau \cdot b \ ✓ \\ b' = -\tau \cdot n \ ✓ \end{cases}}$$

<u>Dim</u>: $t = \alpha'$ $\quad n = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ $\quad \kappa = \|\alpha''\|$

$$\Rightarrow t' = \alpha'' = \|\alpha''\| \cdot \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \kappa \cdot n.$$

$b = t \wedge n$; <u>fatto</u> (esercizio) vale Leibniz:

$b' = t' \wedge n + t \wedge n' = \cancel{k \cdot n \wedge n}_{0} + t \wedge n'$

$\Rightarrow b' \perp t$; inoltre $\|b\| \equiv 1 \Rightarrow b' \perp b$

$\Rightarrow$ b' multiplo di n $\Leftarrow$

(t, n, b)

pongo $b' = -\tau \cdot n$

$n = b \wedge t$

$\Rightarrow n' = b' \wedge t + b \wedge t'$

$= -\tau \cdot n \wedge t + b \wedge k \cdot n$

$= +\tau \cdot \underbrace{t \wedge n}_{b} - k \cdot \underbrace{n \wedge b}_{t} = -k \cdot t + \tau \cdot b.$ $\blacksquare$

α in p. d'a.

$t = \alpha'$ $\qquad n = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ $\qquad b = t \wedge n$

$$(t, n, b)' = (t, n, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

k = curvatura

τ = torsione

Oss: se $M : [a, b] \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $\qquad {}^tM(s) \cdot M(s) = I_n \quad \forall s$

$\Rightarrow M'(s) = M(s) \cdot A(s)$ $\qquad A$ antisimmetrica

Infatti $\quad {}^tM \cdot M = I_n \Rightarrow {}^tM' \cdot M + {}^tM \cdot M' = 0$

$${}^tM' \cdot M = {}^t({}^tM \cdot M')$$

$\Rightarrow$ se $\underline{A = {}^tM \cdot M'}$ ho ${}^tA + A = 0$ $\underline{\text{antisimmetrica}}$

$\Downarrow$

$M' = M \cdot A$.

Q1: come trovare il rif. di Frenet per p non in p.d'a.

Q2: Come trovare κ, τ per p non in p.d'a.

$\underline{A1}$: I: $t = p' / \|p'\|$

per n: ortonormalizzo (t, p'') trovando (t, n)

$b = t \wedge n$

II: $t = p' / \|p''\|$

So che
- $\mathrm{Span}(t, n) = \mathrm{Span}(p', p'')$
- $b = t \wedge n$ = generatore unitario di $\mathrm{Span}(t, n)$

$$b = \frac{p' \wedge p''}{\|p' \wedge p''\|}$$

(t, n, b)

$n = b \wedge t$

A2 : dovrei riparametrizzare $\beta = \alpha \circ \tau$ $\tau = \sigma^{-1}$
α in p.d'a. e usare le derivate di τ...

Teo: Se $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è curva qualsiasi

$$\kappa(s) = \frac{\| \beta'(s) \wedge \beta''(s) \|}{\| \beta'(s) \|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s) \mid \beta'''(s) \rangle}{\| \beta'(s) \wedge \beta''(s) \|^2}.$$

Oss 1: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\beta(s) = \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\kappa(s) = \frac{\| \beta' \wedge \beta'' \|}{\| \beta' \|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \gamma' \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \gamma'' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \gamma' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(\gamma', \gamma'') \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \gamma' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^3}$$

$$= \frac{|\det(\gamma', \gamma'')|}{\| \gamma' \|^3}$$ coerente con curvatura di γ

Oss 2: se $\gamma(s) = \beta(\lambda \cdot s)$ ho coerenza:
$\gamma' = \lambda \cdot \beta'$ $\gamma'' = \lambda^2 \cdot \beta''$ $\gamma''' = \lambda^3 \cdot \beta'''$

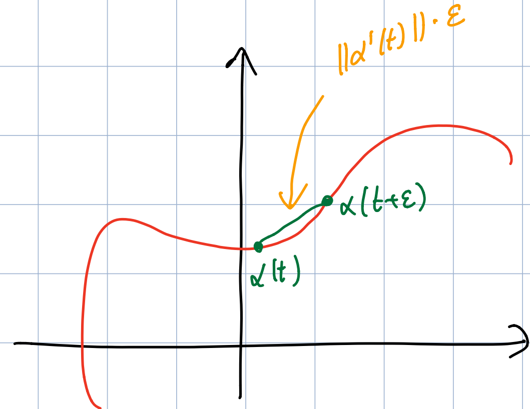
$$\kappa = \frac{\| \gamma' \wedge \gamma'' \|}{\| \gamma' \|^3} = \frac{\| \lambda \cdot \beta' \wedge \lambda^2 \cdot \beta'' \|}{\| \lambda \cdot \beta' \|^3} = \frac{\| \beta' \wedge \beta'' \|}{\| \beta' \|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'' \mid \gamma''' \rangle}{\| \gamma' \wedge \gamma'' \|^2} = \frac{\langle \lambda \cdot \beta' \wedge \lambda^2 \cdot \beta'' \mid \lambda^3 \cdot \beta''' \rangle}{\| \lambda \cdot \beta' \wedge \lambda^2 \cdot \beta'' \|^2}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^6}}{\cancel{\lambda^6}} \cdot \frac{\langle \beta' \wedge \beta'' \mid \beta''' \rangle}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}$$

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva

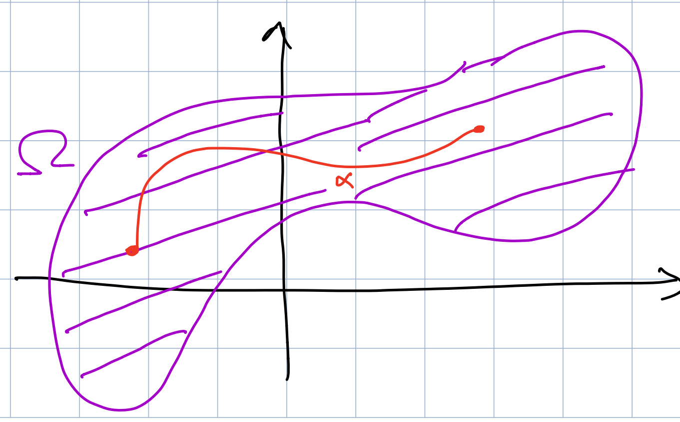
$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\qquad f : \Omega \to \mathbb{R}$ (scalare)

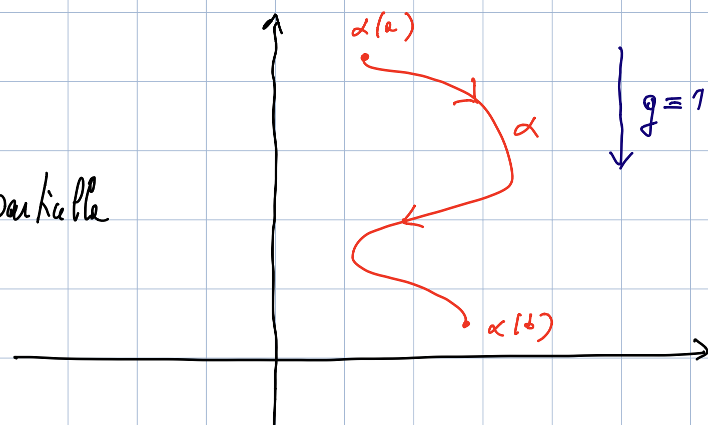
$$\int_\alpha f = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{\substack{\text{costo unitario} \\ \text{dello spostamento} \\ \text{nel punto } \alpha(t)}} \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\|\, dt}_{\substack{\text{elemento di} \\ \text{lunghezza infinitesimo} \\ \text{in } \alpha(t)}}$$

$\alpha : [a,b] \to \Omega$



Altra situazione: invece del costo dipendente solo dal pto, costo dipendente dalla direzione in cui vado: costo $f(x,y)$ in direzione x e $g(x,y)$ in direzione y.

$$\alpha(t) = (X(t), Y(t))$$



Lavoro forze di gravità su particelle

$$\int_a^b -Y'(t) \cdot dt \, .$$

Se avessi campi di forze variabili nello spazio che agiscono in entrambe le direzioni; il lavoro tot è

$$\boxed{\int_a^b \underbrace{f(x,y)}_{\text{campo } x \text{ del campo}} \cdot \underbrace{X'(t)\, dt}_{\text{spostamento infinitesimo in direz } x} + \underbrace{g(x,y)}_{\text{campo } y \text{ del campo}} \cdot \underbrace{Y'(t)\, dt}_{\text{spost. inf. in direz } y}}$$

Def: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto chiamo 1-forma su Ω una scrittura $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ dove $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$; se $\alpha : [a,b] \to \Omega$ è curva pongo

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \Big)\, dt$$

dove $\alpha = (X, Y)$.

Come ricordarlo:

$$\omega(x,y) = f(x,y)\cdot dx + g(x,y)\cdot dy$$

Calcolandolo in $(x,y) = \alpha(t)$ trovo:

$$f(\alpha(t))\cdot \underbrace{d(X(t))}_{X'(t)\cdot dt} + g(\alpha(t))\cdot \underbrace{d(Y(t))}_{Y'(t)\cdot dt}$$

<u>Esempio</u>: $\Omega = (0,+\infty)\times\mathbb{R}$

$$\omega(x,y) = \ln(x)\cdot y^2\cdot dx + \cos(x^3-y^4)\cdot dy$$

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \Omega$$

$$\alpha(t) = \left(e^t+t^3, \sin(t^2)\right)$$

$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 \Big(\ln(e^t+t^3)\cdot(\sin(t^2))^2\cdot(e^t+3t^2) + \cos\left((e^t+t^3)^3-(\sin(t^2))^4\right)\cdot \cos(t^2)\cdot 2t \Big)\,dt$$

$\int_\alpha f$ $\qquad$ f funz. scalare ... serve $\|\alpha'\|$

$\int_\alpha \omega$ $\qquad$ $\omega = f\,dx + g\,dy$ ... servono X', Y'

1-forma