Geometria - Civile - 5/3/21

$f: V \to W \quad \exists \mathcal{B}, \mathcal{C}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k = \mathrm{rank}(f)$

Prendo base $v_{k+1}, \dots, v_n$ di $\mathrm{Ker}(f)$ $\quad$ ($\dim = n-k$)

pre-completo a base $v_1, \dots, v_n$ di V, detta $\mathcal{B}$.

La dim. della formula dimensione dice che $f(v_1), \dots, f(v_k)$ è base di $\mathrm{Im}(f)$; completo a base $\mathcal{C}$ di W.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \} f(v_1), \dots, f(v_k) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{v_1, \dots, v_k} \quad \underbrace{\qquad}_{v_{k+1} \dots v_n}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 6yz$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 5 + 8 + 5 - 8 + 2 - 12 = 0$$

non def pos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -1/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 8yz$$

$$= (x-y+z)^2 + 3(y-z)^2 + y^2 \geq 0$$

def. pos.

Nulla solo se $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

prod scal — bil — simm — def pos. per $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ — bil ok — simm se A è simm — def pos ?

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ prod. scal su V.

Def: norma associata: $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \geq 0$.

Oss: $\|v+w\|^2 = \langle v+w|v+w\rangle \underset{\substack{lin\\sin}}{=} \langle v|v+w\rangle + \langle w|v+w\rangle$

$\underset{\substack{2x\, lin\\dx}}{=} \langle v|v\rangle + \underbrace{\langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle}_{simm} + \langle w|w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$

$\Longrightarrow \langle v|w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

dunque $\|\cdot\|$ determina $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (su $\mathbb{R}$).

Proprietà norma:

1. $\|v\| > 0 \quad \forall v \neq 0, \quad \|0\| = 0$
2. $\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v|\lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v|v\rangle} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

3. (disuguaglianza di Cauchy-Schwartz):

$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

e vale uguaglianza se e solo se sono multipli fra loro

Dim: se $w = \lambda \cdot v$

$$|\langle v|w\rangle| = |\langle v|\lambda v\rangle| = |\lambda \cdot \langle v|v\rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 \quad \checkmark$$

Altrimenti noto che $tv + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, dunque

$$\|tv+w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\|$$

$$\|tv\|^2 + 2\langle tv|w\rangle + \|w\|^2 = \|v\|^2 \cdot t^2 + 2\langle v|w\rangle \cdot t + \|w\|^2$$

$\Delta/4 < 0 \qquad \langle v|w\rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$

$$\langle v|w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \qquad \square$$

4. Disuguaglianza triangolare

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

e vale uguaglianza se solo se sono uno multiplo non neg. dell'altro

Dim: $w = t \cdot v \quad t \geq 0$

$$\|v+w\| = \|v+tv\| = (1+t)\|v\|$$

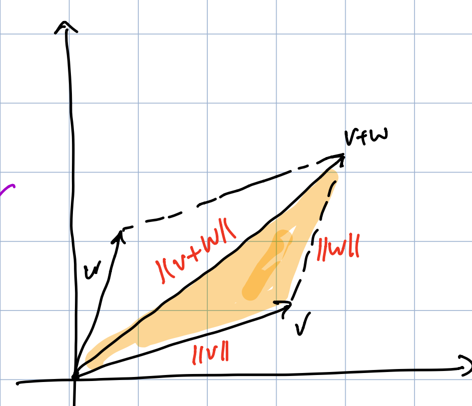
$$\|v\| + \|w\| = \|v\| + \|tv\| = (1+t)\|v\| \quad \checkmark$$

$w = tv \quad t < 0 \quad v \neq 0$

$$\|v+w\| = |1+t| \cdot \|v\|$$

$$\|v\| + \|w\| = (1-t) \cdot \|v\|$$

$$|1+t| < 1-t \quad (t<0) \quad \checkmark$$



Se lin. indip.:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$
$$< \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

faccio $\sqrt{\ }$ ... $\blacksquare$

Def: chiamo distanza associata a $\langle .|. \rangle$ la
$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(v,w) = \|v-w\|.$$

Proprietà:

1. $d(v,w) \geq 0$, nulla se solo se $v=w$
2. $d(v,w) = d(w,v)$ $\quad \|w-v\| = \|(-1)\cdot(v-w)\| = |-1|\cdot\|v-w\| = \|v-w\|$
3. $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$

$$\|v-w\| = \|v-u+u-w\|$$
$$= \|(v-u)+(u-w)\|$$
$$\leq \|v-u\| + \|u-w\| = d(v,u) + d(u,w).$$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\langle .|. \rangle$ prod. scal.

Def: v è unitario se $\|v\| = 1$;

u, v sono ortogonali se $\langle u|v\rangle = 0$, scrivo $u \perp v$

$v_1, \dots, v_k$ sistema ortogonale se $v_i \perp v_j$ $i \neq j$

ortonormale se inoltre ogni v_i è unitario.

Lem: $v_1, \dots, v_k$ sistema ortogonale di vett $\neq 0$ è lin. indip.

Dim: Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.
Fisso $i \in \{1 \dots k\}$ e noto che

$$\underbrace{\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid v_i \rangle}_{= \langle 0 \mid v_i \rangle = 0} = \alpha_1 \underbrace{\langle v_1 | v_i \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i | v_i \rangle}_{\|v_i\|^2} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k | v_i \rangle}_{=0}$$

$$= \alpha_i \cdot \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0} \implies \alpha_i = 0. \quad \blacksquare$$

Prop: se $v_1, \dots, v_n$ è base $\mathcal{B}$ ortogonale di V allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \qquad \text{cioè } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v | v_1 \rangle / \|v_1\|^2 \\ \vdots \\ \langle v | v_n \rangle / \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Oss: (1) per trovare le coord rispetto a $\mathcal{B}$ ortogonale basta fare calcolo (no sistema)

(2) le coord. i-esima di v dipende solo da v_i

Invece: per base qualsiasi se cambio un solo vettore cambiano <u>tutte</u> le coordinate

Dim: provo intanto che

(*) se $\langle w | v_i \rangle = 0$ $\quad i = 1 \dots n$ allora $w = 0$.

Infatti so che $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$; calcolando

$0 = \langle w | v_i \rangle = \alpha_i \cdot \|v_i\|^2 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i \implies w = 0$

Grazie a (*) basta vedere che

$$w = v - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \quad \text{è} \perp \text{a ogni } v_j$$

$$\langle w | v_j \rangle = \left\langle v - \sum \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{\text{sempre 0 tranne per } i=j \text{ e in tal caso fa } \|v_j\|^2}$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot \|v_j\|^2 = 0 .$$

∎