Geometria – Civile – 4/3/21

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

Trovati α, β, γ si pone
$\delta = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$

Oss $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$

$$(b_1c_2 - b_2c_1) \cdot a_1 + \left(-(a_1c_2 - a_2c_1)\right) b_1 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c_1 = 0$$

$$\text{"} \cdot a_2 + (\text{"}) \cdot b_2 + (\text{"}) c_2 = 0$$

$\alpha = b_1c_2 - b_2c_1$
$\beta = -(a_1c_2 - a_2c_1)$
$\gamma = a_1b_2 - a_2b_1$

almeno uno è $\neq 0$ perché $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ lin. indip.

— o —

Diagonalizzazione

$f: V \to V$ lin.; cerchiamo $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile" (diagonale)

Non ha senso cercare $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ perché **ESERCIZIO**
è sempre possibile trovare $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ t.c.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad k = \mathrm{rank}(f)$$

Se scelgo $\mathcal{B}_0$ a caso e pongo $A = [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}$ le altre matrici di f sono quelle del tipo

$$\underbrace{M^{-1} \cdot A \cdot M}_{\text{coniugata di } A.} \qquad M \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ invertibile}$$

Pb: data A trovare M t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia facile (diagonale)

Def: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f se $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$; ogni tale v è detto autovettore.

Def: polinomio caratteristico di f è $p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$
$= \det(t \cdot I_n - [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0})$

Per matrici $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$
$= t^n - tr(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \det(A)$

Fatto: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autoval. di $f \iff$ è radice di $p_f(t)$.

Oss: $p_A(t) = t^n - \underbrace{tr(A)}_{\text{somma di tutte le radici con molteplicità}} \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \underbrace{\det(A)}_{\text{prodotto di tutte le radici con molteplicità}}$

Se λ è radice di $p_f(t)$ diamo:
molt. alg. la molt. di λ come radice
molt. geom. $= \dim \operatorname{Ker}(\lambda \cdot id_V - f) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda \cdot I_n - A)$

Teo: f è diagonalizzabile $\iff$

(1) tutte le radici di $p_f(t)$ sono in $\mathbb{K}$

(2) per ognuna ho molt geom = molt alg.

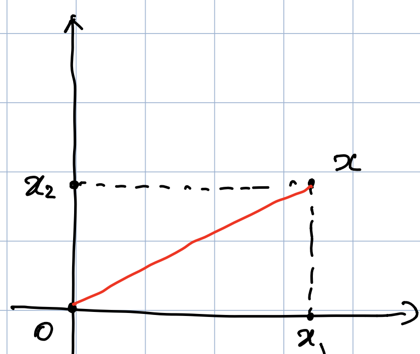
Nota: (1) sempre vera se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

In generale $1 \leq m.g. \leq m.a$ dunque (2) vera se $p_f(t)$ ha radici distinte

———— o ————

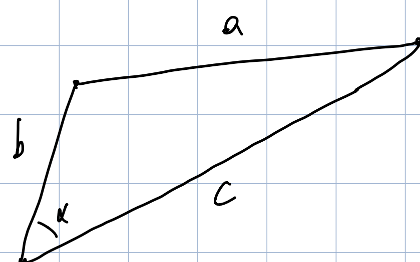
Prodotti scalari

Geometria del piano euclideo.

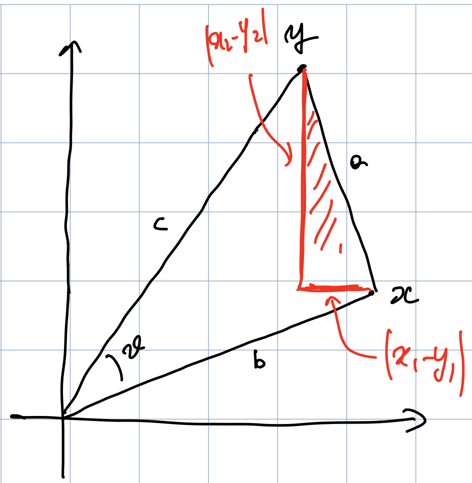


$$d(0,x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Carnot:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



$$\cos(\vartheta) = \frac{d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2}{2\, d(0,x)\cdot d(0,y)}$$

$$= \frac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1\cdot x_1 + x_2\cdot x_2}\cdot\sqrt{y_1\cdot y_1+y_2\cdot y_2}}$$

Def: chiamo prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1y_1 + x_2y_2$$

Norma associata

$$\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^2}} \geq 0$$

scoperto :
$$d(x,y) = \|x-y\|_{\mathbb{R}^2}$$
$$\cos(\sphericalangle(x,y)) = \frac{\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|x\|_{\mathbb{R}^2}\cdot\|y\|_{\mathbb{R}^2}}.$$

Estensione a $\mathbb{R}^n$: prod. scal. canonico

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

$$= \underbrace{\underset{1\times n}{(x_1 \cdots x_n)}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}}}_{1\times 1} = {}^t x\cdot y$$

Def: se V è sp. vett. reale dico che $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ è:

- bilineare se è lin. a sin $\phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3) = \lambda_1 \phi(v_1, v_3) + \lambda_2 \phi(v_2, v_3)$
  lin a dx $\phi(v_3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \phi(v_3, v_1) + \lambda_2 \phi(v_3, v_2)$
- simmetrica se $\phi(v_2, v_1) = \phi(v_1, v_2)$
- def pos. se $\phi(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$.
- prodotto scalare se è bil. simm def. pos.

Oss: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ canonico è prod. scal:

- $\langle \lambda x + \mu y | z \rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{=} \lambda \cdot \langle x | z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu \cdot \langle y | z \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$$ {}^t(\lambda x + \mu y) \cdot z = (\lambda \cdot {}^t x + \mu \cdot {}^t y) \cdot z = \lambda \cdot {}^t x \cdot z + \mu \cdot {}^t y \cdot z \qquad \lambda \cdot {}^t x \cdot z + \mu \cdot {}^t y \cdot z $$

✓ sin

$$ \langle x | \lambda y + \mu z \rangle_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{=} \lambda \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mu \langle x | z \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \dots $$

✓ dx

Oss: $${}^t(\underbrace{\underbrace{N \cdot M}_{h\times k \;\; k \times m}}_{h \times m}) = \underbrace{{}^t M \cdot {}^t N}_{m \times k \;\; k \times h} \qquad \text{(risultati: } m \times h \text{ e } m \times h)$$

ogni volta che il prod. ha senso.

$$ \left({}^t(N \cdot M)\right)_{ij} = (N \cdot M)_{ji} = \sum_{l=1}^{k} (N)_{jl} \cdot (M)_{li} $$

$$ \left({}^t M \cdot {}^t N\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} ({}^t M)_{il} \cdot ({}^t N)_{lj} = \sum_{l=1}^{k} (M)_{li} \cdot (N)_{jl} $$

$$ \langle y | x \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t y \cdot x = {}^t({}^t y \cdot x) = {}^t x \cdot {}^t({}^t y) = {}^t x \cdot y $$ simm ✓

$\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$ se $x \neq 0$ def. pos. ✓

Es: $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$ funzioni reali continue su $[0,1]$.

$$\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t) \cdot y(t) \, dt .$$

Affermo che è prod. scalare:

bil: sin $\boxed{\langle \lambda x + \mu y | z \rangle} = \int_0^1 (\lambda x + \mu y)(t) \cdot z(t) \, dt$

$$= \int_0^1 \left(\lambda \cdot x(t) + \mu \cdot y(t) \right) \cdot z(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\lambda \cdot x(t) z(t) + \mu \cdot y(t) z(t) \right) dt$$

$$= \lambda \cdot \int_0^1 x(t) \cdot z(t) \, dt + \mu \cdot \int_0^1 y(t) \cdot z(t) \, dt$$

$$= \boxed{\lambda \langle x | z \rangle + \mu \langle y | z \rangle}$$

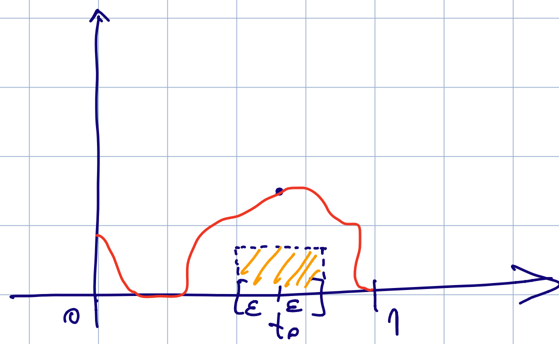
Oss: se ϕ è simm e lin a sin lo è anche a dx.

simm $\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t) \cdot y(t) \, dt$

$\langle y | x \rangle = \int_0^1 y(t) \cdot x(t) \, dt$ ✓

def. pos. $\langle x | x \rangle = \int_0^1 \underbrace{x(t)^2}_{\geq 0} \cdot dt \geq 0$

Se $x \neq 0$, cioè $\exists t_0 \in [0,1]$ t.c. $x(t_0) \neq 0 \Rightarrow x(t_0)^2 > 0$



su $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ è $\geq \frac{1}{2} x(t_0)^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(t)^2 dt \geq \varepsilon \cdot x(t_0)^2 > 0$$

def pos. ✓

Esempio: $V = M_{m\times m}(\mathbb{R})$ $\quad \langle A | B \rangle = tr(\underbrace{{}^tA \cdot B}_{m\times m})$ $\quad$ ($m\times m$ $\quad m\times m$)

lin. sim. : $\langle \lambda A + \mu B | C \rangle = tr({}^t(\lambda A + \mu \cdot B) \cdot C)$
$= tr((\lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB) \cdot C)$
$= tr(\lambda {}^tA \cdot C + \mu \cdot {}^tB \cdot C)$
$= \lambda \cdot tr({}^tA\, C) + \mu\, tr({}^tB \cdot C)$
$= \lambda \langle A | C \rangle + \mu \langle B | C \rangle$

simm : $\langle A | B \rangle = tr({}^tA \cdot B) = tr({}^t({}^tA \cdot B))$
$= tr({}^tB \cdot A) = \langle B | A \rangle$

def pos $\langle A | A \rangle = tr({}^tA \cdot A) = \sum_{i=1}^{m} ({}^tA \cdot A)_{ii}$
$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} ({}^tA)_{ij} \cdot (A)_{ji} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (A)_{ji}^2$

$= $ somma quadrati di tutti i coeff. di A

> 0 se $A \neq 0$.

Come sono fatti i prod. scal. su $\mathbb{R}^n$? (Oltre a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$.)

Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ pongo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto {}^t x \cdot A \cdot y$$

Oss: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \cdot | \cdot \rangle_{I_n}$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è bilineare (segue da lin. trasp. e bilinearità prod righe x col).

Prop: le applicazioni bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono tutte del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

Dim: data $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bil. cerco A t.c.

$\phi = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

Notiamo che data qualsiasi A ho

$$\langle e_i | e_j \rangle_A = {}^t e_i \cdot A \cdot e_j$$

$$= (0 \dots 0\, \underset{i}{1}\, 0 \dots 0) \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} j$$

$= a_{ij}$.

Pongo allora $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$, $A = (a_{ij})_{i,j = 1, \dots, n}$.

Provo che $\phi = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ cioè che

$$\phi(x, y) = \langle x | y \rangle_A \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n :$$

$$\phi(x,y) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$\underset{\substack{\text{lin}\\ \text{sin}}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \ \phi\left(e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \underset{\substack{\text{lin}\\ \text{dx}}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \phi(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (A \cdot y)_i = {}^t x \cdot A \cdot y = \langle x | y \rangle_A . \qquad \blacksquare$$

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è simm. $\Longleftrightarrow$ A è simm.

Dim: $\boxed{\Longleftarrow}$: $\langle y | x \rangle_A = {}^t y \cdot A \cdot x = {}^t y \cdot {}^t A \cdot x$

$$= {}^t\left({}^t y \cdot {}^t A \cdot x\right) = {}^t x \cdot A \cdot y = \langle x | y \rangle_A .$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\quad \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle_A}_{a_{ij}} = \underbrace{\langle e_j | e_i \rangle_A}_{a_{ji}} \qquad \blacksquare$

Quali sono def pos?

Libro di testo Esculapio (ediz. 2018)

Molti testi di esercizi

con $*$ = disponibile soluzione su sito editore
non si fanno in aula

senza $*$ = molti si fanno in aula (P-Lisca)

PROVATE DA SOLI SEMPRE

seguendo il ritmo delle lezioni

CHIEDETE RICEVIMENTI

—— ∘ ——

Visto: le bil. simm su $\mathbb{R}^n$ sono quelle $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A simm; quali def. pos.?

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\langle x|x\rangle_A = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

No: su $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è neg.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ su $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ fa 0

su $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ fa $3-8+4<0$

No

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

$$= x_1^2 + (2x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

Nulla solo se $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}$ dunque solo se $x = 0$

Sì

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Perché sia def pos. devo avere $a, c > 0$
Segue da ciò $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è pos su ogni $x \neq 0$ con $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$; vogliamo

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0 \qquad \forall x_1, x_2 \neq 0$$

$$a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + c > 0 \qquad \forall x_1 x_2 \neq 0$$

$$a t^2 + 2bt + c > 0 \qquad \forall t$$

$$\frac{\Delta}{4} < 0 \qquad b^2 - ac < 0$$

$$ac - b^2 > 0$$

$$\det(A) > 0.$$

Scoperto: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos

$\iff a > 0, \ \det(A) > 0$.

Vediamo qualche 3×3:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\pi & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

NO   NO

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

NO

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & \cdot \\ 7 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & \cdot & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & 8 \end{pmatrix}$$

NO NO

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 11 & 9 \\ \cdot & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

NO

Esercizio per domani: dire se sono def. pos.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$