# Geometria – Ing. Civile – 3/3/21

www

Ripasso

$\mathbb{K}$ campo $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ $\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

1-4 : $+$ $\quad$ 0 neutro, opposto, assoc. comm.

5-8 : $\cdot$ $\quad$ 1 neutro, inv $\neq 0$, assoc. comm

9 : distributiva

$V$ sp. rett. su $\mathbb{K}$

$+ : V \times V \to V$ $\qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

1-4 : $+$ $\quad$ 0 neutro, opposto, assoc. comm.

5-6 distributive $\quad \lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \qquad (\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

7 assoc $\quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$

8 $\quad 1 \cdot v = v$

comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ con coeff $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$$

- $v_1, \dots, v_m$ lin. indip. se l'unica comb. lin. che ha risultato 0 è quella con coeff. tutti 0
- $v_1, \dots, v_m$ generano $V$ se ogni el. di $V$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$
- base se lin. indip. e generano. (devono essere ordinati)

**Teo**: due basi di $V$ (se ce ne sono) hanno lo stesso numero di elementi.

**Def**: $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ è tale numero

Data $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ base di $V$ ogni $v\in V$ si scrive in modo unico come $v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$; chiamo

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$$ vettore delle coordinate indicato con $[v]_{\mathcal{B}}$.

**Fatti**:
- se $v_1,\dots,v_k$ sono lin. indip. ma non generano posso completarli a base $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$
- se $v_1,\dots,v_h$ generano ma non sono lin. indip posso estrarre base

$$v_1,\ v_2,\ \cancel{v_3},\ \dots,\ v_7,\ \cancel{v_8},\ \cancel{v_9},\ \dots\ v_{81}$$

scarto $v_j$ se $v_j$ è comb lin. di $v_1,\dots,v_{j-1}$ (cioè di quelli tenuti prima)

**Def**: $W\subset V$ è sottosp. vett. se $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ $\forall w,u\in W$ ho $\lambda\cdot w+\mu\cdot u\in W$.

**Def.** se $X\subset V$ chiamo $\mathrm{Span}(X)$ = generato di $X$ il più piccolo sttosp. vett. che contiene $X$

**Fatto**: $\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n)=\{\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n : \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}$

$W, Z$ sottosp. $W \cap Z$ lo è ; $W + Z = \mathrm{Span}(W \cup Z)$

Grassmann: $\dim(W) + \dim(Z) = \dim(W \cap Z) + \dim(W+Z)$

Es: in $\mathbb{R}^7$ due sottosp. di $\dim = 4$ si intersecano almeno in una retta:

$$\underline{\underline{4 + 4}} = \underset{\substack{\vee| \\ 1}}{\dim(W \cap Z)} + \underline{\underline{(\leq 7)}}$$

---

$V, W$ sp. vett. $f : V \to W$ è <u>lineare</u> se

$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ v_1, v_2 \in V$

Es: se $\mathcal{B}$ è base di $V$

$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è lineare biiettiva

$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \}$

Teo: $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$

$f$ iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Es: non esistono $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ iniettive:

$$\underset{\substack{\vee| \\ 2}}{\dim(\mathrm{Ker}(f))} + (\leq 7) = 9$$

Es: non esistono $f: \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^{17}$ surgettive

$$\underset{\substack{\vee\!\shortparallel \\ 0}}{\dim(\ker f)} + \underset{\substack{\wedge\!\shortparallel \\ 11}}{\dim(\mathrm{Im}\, f)} = 11$$

Fatti:
- può esistere $f: V \to W$ lin. bigettiva $\Longleftrightarrow$ $\dim(V) = \dim(W)$
- se $\dim(V) = \dim(W)$ allora $f: V \to W$ lin iniettiva $\Longleftrightarrow$ surgettiva.

Def: se $W, Z \subset V$ sono sttsp. e $W \cap Z = \{0\}$, $W + Z = V$ dico $V = W \oplus Z$; ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + z$; posto $w = p(v)$, $z = q(v)$ chiamo $p, q$ proiez. associate alla $V = W \oplus Z$; soddisfano
- $p, q : V \to V$ lineari
- $p + q = \mathrm{id}_V$
- $p \circ p = p \qquad q \circ q = q$
- $p \circ q = q \circ p = 0$
- $W = \mathrm{Im}(p) = \ker(q)$, $Z = \ker(p) = \mathrm{Im}(q)$

Fatto: data $p: V \to V$ con $p \circ p = p$ ho che $p$ è la proiez. su $W$ risp. a $V = W \oplus Z$ con $W = \mathrm{Im}(p)$, $Z = \ker(p)$.

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ $\qquad (A)_{ij}$ = coeff in riga $i$ e col $j$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots h}}$$

Prodotto righe x colonne:

$$A \in \mathcal{M}_{m\times h} \qquad B \in \mathcal{M}_{h\times m} \qquad A\cdot B = \mathcal{M}_{m\times m}$$

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{h} (A)_{il}\cdot(B)_{lj}$$

Fatto: •) è bilineare (a sin e a dx)

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\cdot B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B$$

....

•) è associativo $\quad A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C.$

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \quad ; \quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$x \longmapsto A\cdot x \qquad \text{(scrivo } A \text{ invece di } f_A\text{)}$$

applicazione lineare associata ad $A$.

$V, W \; ; \quad \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{ f : V \to W \text{ lineare} \}$

Fatto $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ è spazio vett. con operazioni

$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$
$$(\lambda\cdot f)(v) = \lambda\cdot f(v)$$

**Fatto**: date base $v_1, \dots, v_n$ di $V$ e $w_1, \dots, w_n \in W$
esiste una e una sola appl. lin. $f: V \to W$ t.c.
$$f(v_i) = w_i \qquad i = 1 \dots n$$

Date $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di $V$
$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di $W$
$f: V \to W$ lin. chiamo $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
matrice associata a $f$ risp. a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo la
$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot w_j \, .$$

**Oss**: $[f_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = A$ $\qquad$ ($\mathcal{E}_h$ = base canonica di $\mathbb{K}^h$)

Fissate $\mathcal{B}, \mathcal{C}$
$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W) \ni f \longmapsto [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$
è lineare bijettiva.

**Cambi di base**:

$\mathcal{B}$ base di $V$, $\mathcal{B}'$ altra; matrice di cambio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$
la $X$ t.c. $\quad v_i' = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \cdot v_j \quad \left( X = [id_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \right)$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = X^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}'$ via $X$ $\quad$ ; $\quad$ $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ via $Y$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = Y^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X$$

$f: V \to W$ lin. biettiva $\Rightarrow f^{-1}$ lineare

$A \in M_{m\times n}$ può essere invertibile come applicaz. solo se $m=n$.

$A \in M_{n\times n}$ essa è invertibile come applicazione se e solo se lo è come matrice, cioè $\exists B$ t.c.

$$A \cdot B = I_n \qquad B \cdot A = I_n$$

(in realtà sapendo $A \in M_{n\times n}$ una delle due implica l'altra).

In tal caso pongo $B = A^{-1}$.

Sist. lin. di $m$ equaz. in $n$ incognite è

$$A \cdot x = b \qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^m$$

incognita $x \in \mathbb{K}^n$.

Omogeneo se $b = 0$; in tal caso $\{\text{soluz.}\} = \ker(A)$.

Altrimenti

$$\{\text{soluz.}\} \begin{cases} \nearrow \ \emptyset \\ \searrow \ \{x_0 + u : u \in \ker(A)\} \quad x_0 \text{ soluz.} \end{cases}$$

Rango di $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)) \qquad A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

R-C: $A \cdot x = b$ ha soluz. $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b)$.

# Determinante

I. Assiomatico

Teo: esiste una e una sola applicaz. $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

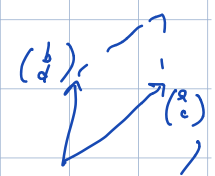
- è lineare in ciascuna colonna fissate le altre
- cambia segno scambiando due colonne
- $\det_n(I_n) = 1$.

Fatto: $A$ invertibile $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

II. Esplicito

$$\det_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

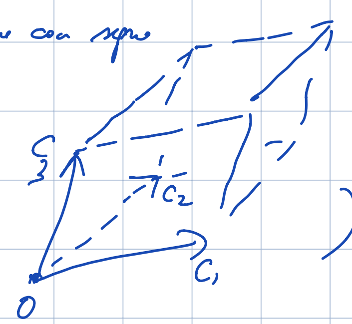
(area con segno



)

$$\det_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(volume con segno



)

$$\mathfrak{S}_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \quad \text{biiettive} \}$$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$

→ $\pm 1$ a seconda che $\sigma$ sia composizione di numero pari/dispari di trasposizioni

→ $$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

$$\det_n(A) = \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}}_{n! \text{ addendi}} \underbrace{\mathrm{sgn}(\sigma)}_{\pm 1} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}}_{\substack{\text{prodotto di } n \text{ coeff.} \\ \text{di } A \text{ su righe e} \\ \text{colonne diverse}}}$$

Conseguenze:

- Sviluppi di Laplace : $A^{ij}$ = matrice ottenuta da $A$ cancellando riga $i$ col $j$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \det(A^{ij})$$

sviluppo lungo colonna $j$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot \det(A^{ji})$$

- $\det({}^tA) = \det(A)$

- Operazioni che non cambiano det:
  - $\Rightarrow$ sostituire colonna con sé stessa + multiplo altra
  - $\Rightarrow$ " riga " " " + " "

Fatto: se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji})$$

Cramer: se $\det(A) \neq 0$ le soluz. di $A \cdot x = b$ è:

$$x_i = \frac{\det\left(\begin{array}{c}\text{matrice ottenuta da } A \\ \text{sostituendo } i\text{-esima col. con } b\end{array}\right)}{\det(A)}$$

Def: una sottomatrice $B$ di $A$ è una ottenuta da $A$ cancellando alcune righe / colonne; una $C$ è orlata di $B$ se ottenuta riaggiungendo una riga e una colonna.

Teo (orlati): data $A \in M_{m \times n}$ se esiste $B \in M_{r \times r}$ t.c.:

- $\det(B) \neq 0$
- $\det(C) = 0$ $\forall C$ orlata di $B$

allora $\text{rank}(A) = r$.

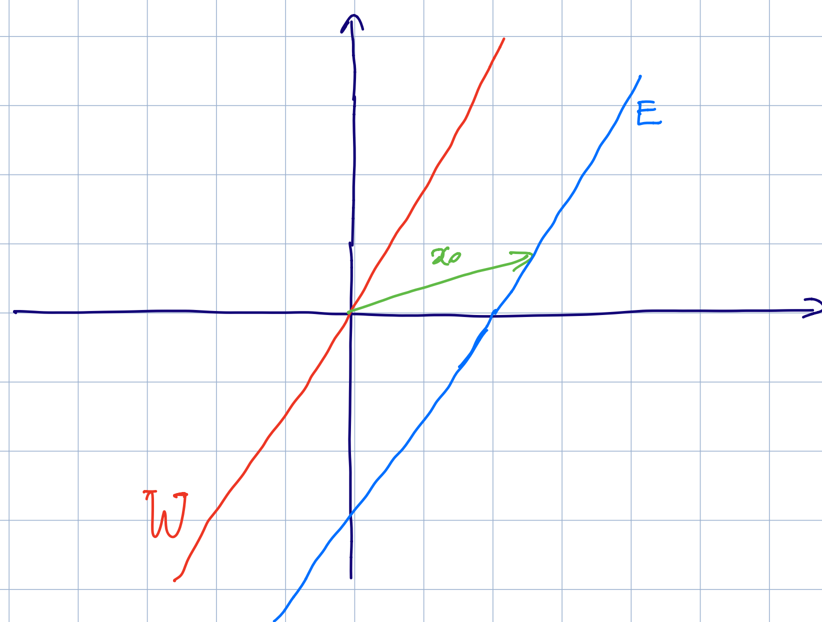
Calcolo rango:

- tutta 0? Se è, rango 0.
- Fisso el. $\neq 0$; guardo orlate $2 \times 2$ (non tutte le $2 \times 2$) tutte $\det = 0$? Se è, rango 1.
- Fisso una $2 \times 2$ con $\det \neq 0$ e guardo orlate $3 \times 3$ (non tutte le $3 \times 3$) tutte $\det = 0$? Se è, rank $= 2$
- Se no fisso $3 \times 3$ . . . . . .

$V$ sp. vett. chiamo sottosp. affine un insieme

$$E = \{x_0 + w \ : \ w \in W\}$$

dove $x_0$ è fissato, $W$ sottosp. vett fissato.




Scrivo $E = x_0 + W$. Chiamo $\dim(E) = \dim(W)$.

In $\mathbb{K}^n$ posso descrivere sttsp. affine $E$ di dim $= k$.

- presentazione cartesiana: $E = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = b\}$

  servono almeno $n-k$ equazioni (sempre possibile $n-k$)
- presentazione parametrica

$$E = x_0 + \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

servono almeno $k$ parametri (sempre possibile $k$)

Equaz. param/cart. per rette/piani in $\mathbb{R}^3$:

Retta: $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \text{Span}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ; $\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\delta_1\\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta_2\end{cases}$

param. $\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}\neq 0$ cart. $\text{rank}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix}=2$

Piano: $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}\right)$ ; $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$

param. $\text{rank}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{pmatrix}=2$ cart. $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$

$$\begin{cases} bx-ay = bx_0-ay_0\\ cx-az = cx_0-az_0\\ cy-bz = cy_0-bz_0\end{cases} \qquad \begin{pmatrix} b & -a & 0\\ c & 0 & -a\\ 0 & c & -b\end{pmatrix} \quad \det = 0$$

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta/\alpha\\0\\0\end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix}0\\\delta/\beta\\0\end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix}0\\0\\\delta/\gamma\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\gamma\\-\beta\end{pmatrix}$ lin. dip. $(\det=0)$

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ = una soluz. part. ....

scelgo una sottomatr. $2\times 2$ con $\det\neq 0$

e pongo 0 la componente non coinvolta

Mi serve una soluz. $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ di $\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0\\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=0\end{cases}$.

Noto che

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\right) + \beta_1\left(-\left(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\right)\right) + \gamma_1 \cdot \left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right) = 0 \\ \alpha_2\left(\quad '' \quad\right) + \beta_2\left(\quad '' \quad\right) + \gamma_2\left(\quad '' \quad\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ -\left(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\right) \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}.$$