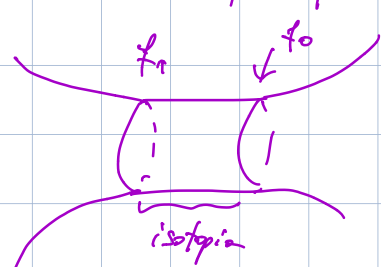
LDT 18/4/20

$\mathcal{M}_n = \{$ n-varietà DIFF connesse chiuse $\}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}_n} = \{$ " orientate $\}$

Somma connessa: $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n \longrightarrow M_1 \# M_2 \in \mathcal{M}_n$

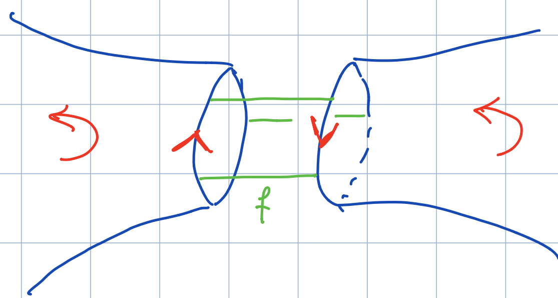
$D_j \subset M_j \quad D_j \cong D^n \quad (M_1 \setminus \mathring{D}_1) \cup_f (M_2 \setminus \mathring{D}_2)$

"quasi ben def": esercizio f_0, f_1 isotope $(\exists \{f_t\}_{t \in [0,1]})$
$\Rightarrow \#$ con f_0 e f_1 uguali



Fatto: ogni $g: S^{n-1} \circlearrowleft$ è isotopa id o $-id$

Su $\overrightarrow{\mathcal{M}_n}$ è ben def richiedendo f inverta orient.:



Oppure: $M = M_1 \# M_2$ se $\exists\, \Sigma \cong S^{n-1} \subset M$ che sconnette t.c. tagliando M lungo Σ e tappando i buchi con D^n ottengo M_1 e M_2

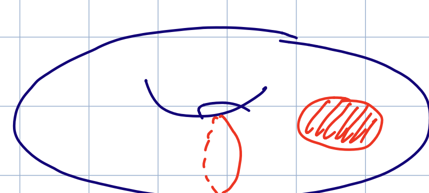
<u>Oss</u>: 1) $\#$ ha el neutro S^n $\quad (n \leq 3)$

2) $\#$ è associativa e commut.

Dunque: $M = M_1 \# \dots \# M_k$ se $\exists\, \mathcal{S} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{k-1}\}$ Σ_i sfere che sconnette t.c. tagliando M lungo $\mathcal{S}$ e tappando i buchi ottengo $M_1, \dots, M_k$.

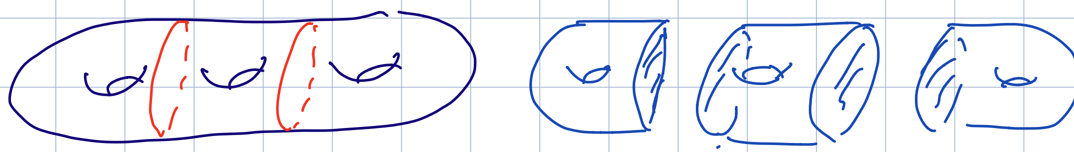
<u>Def</u>: M è irriducibile se <u>non</u> si può scrivere come $M = M_1 \# M_2$ con $M_1, M_2 \neq S^n$ ovvero se ogni $\Sigma \cong S^{n-1} \subset M$ che sconnette borda un D^n

$\boxed{n=2}$ $\quad S^2$



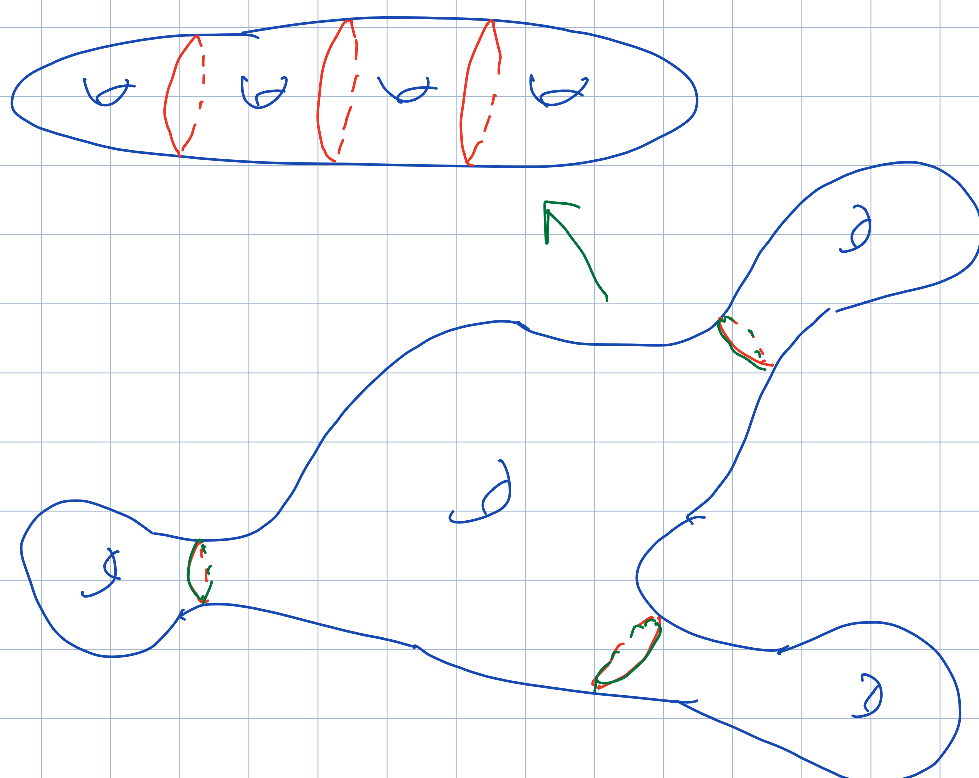
T

irriducibile



Ogni sup è S^2 o $\#_{j=1}^{k} T$. (deco unica).

Oss: la famiglia di circonf $\mathcal{T}$ lungo cui tagliare per avere la deco unica non è unica/isotopia:



Teo (Haken-Kneser-Milnor): ogni $M \in \mathcal{M}_3$ si esprime in modo unico come $M = M_1 \# \dots \# M_k$ con M_j irrid ma la fam. di sfere che dà tale deco non è unica.

- esistenza : finitezza (sup. normali)
- unicità ("come" ieri)

Fatto: c'è una classe di varietà (di Seifert) che "contengono molti tori non banali ($\neq \partial U(K)$)" che sono classificate.

"Teo" (Jaco-Shalen-Johansson): data $M \in \mathcal{M}_3$ irriducibile esiste famiglia $\mathcal{F}$ di tori in M tagliando lungo cui trovo varietà o Seifert o senza tori non banali (tranne quelli di bordo).

Teorema di geometrizzazione di Thurston–Perelman secondo cui tutti i pezzi sono geometrici ($\Rightarrow$ "classificazione dei pezzi non Seifert").

Q: fino a che punto $\pi_1(M)$ determina $M \in \mathcal{M}_n$.

$n = 2$: del tutto.

$n = 3$: non del tutto (quasi: Waldhausen)

congettura di Poincaré:

$$\pi_1(M) = 1 \Rightarrow M = S^3 \qquad \text{(Perelman)}$$

$$(H_1(M) = 0 \not\Rightarrow M = S^3)$$

Proveremo un risultato in questa direz. per nodi:

Teo: $\pi_1(E(K)) = \mathbb{Z} \Rightarrow K = \bigcirc$.

— ∘ —

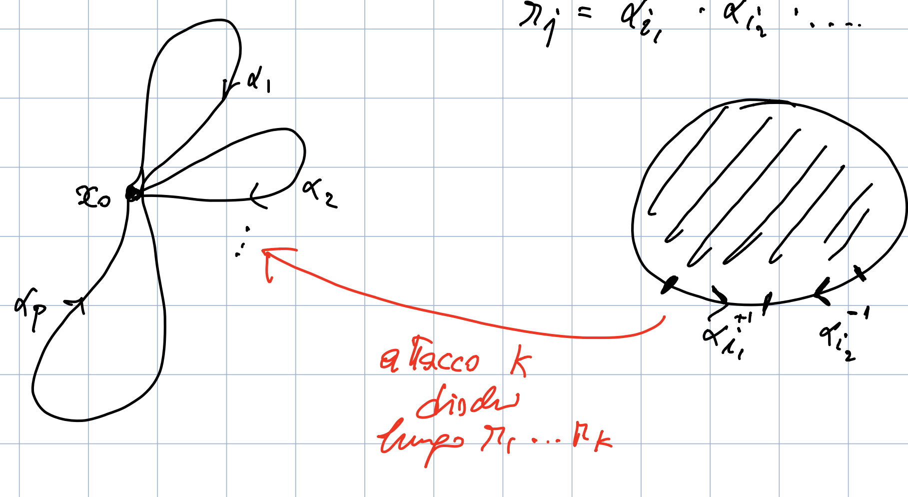
Fatto: non esistono algoritmi che rispondano a:

- $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid r_1, \dots, r_k \rangle = 1$?
- dati $w_1, w_2 \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, $w_1 \overset{?}{=} w_2$.

Conseguenza: impossibile classificare in modo algoritmico le varietà di dim ≥ 4.

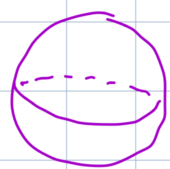
Oss: $\forall\, G = \langle \alpha_1 \dots \alpha_p \mid r_1 \dots r_k \rangle$ $\exists\, X$ 2-complesso (con var) t.c. $\pi_1(X) = G$:

$$r_j = \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \alpha_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_t}^{\varepsilon_t}$$

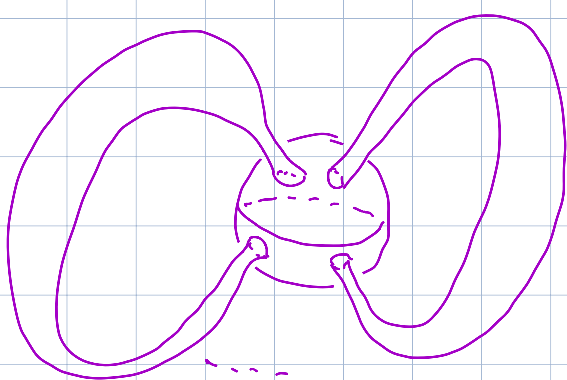


Riesco a usare invece che X una $M \in \mathcal{M}_n$?

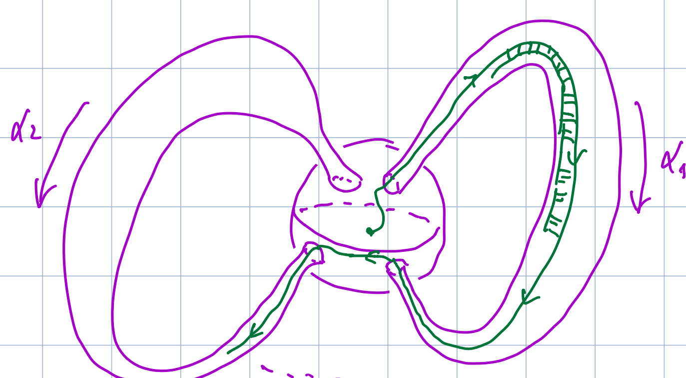
$n = 3$:

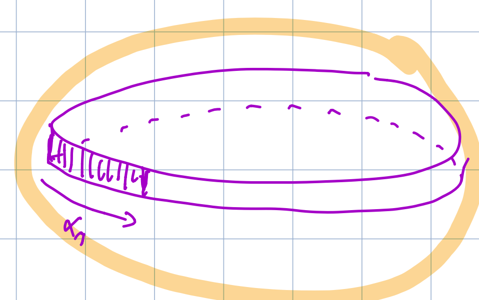


$\longleftrightarrow$ pto base



$\longleftrightarrow$ bouquet di circonf

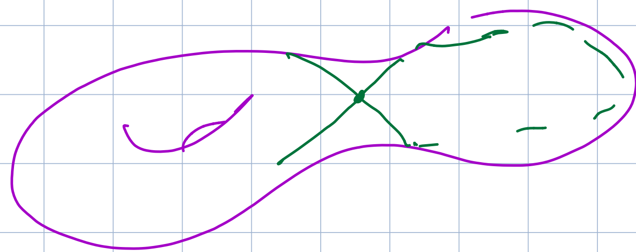




$\gamma = \alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \ldots$

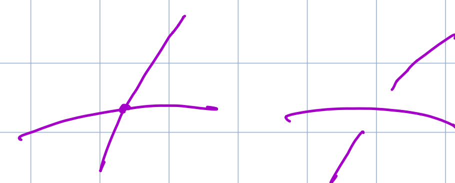
in generale non riesco

- non tutte le γ sono rappresentate da curve semplici chiuse



• due r_j possono creare autointersezioni inevitabili

$\boxed{n=4}$ stessa cosa funziona

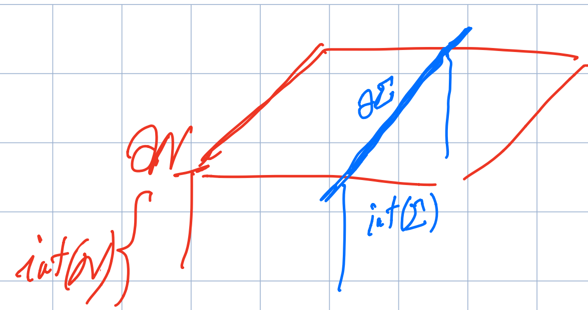


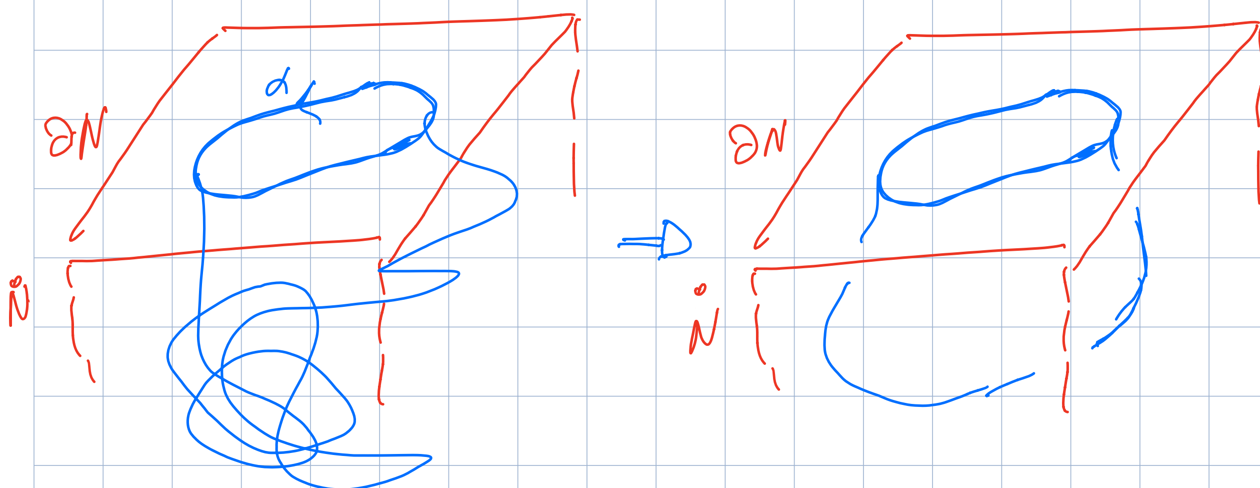
$\Rightarrow \forall G = \langle \alpha_1, \dots \alpha_p \mid r_1, \dots r_k \rangle \quad \exists M \in \mathcal{M}_4$
t.c. $\pi_1(M) = G$.

<u>Lemma di Dehn</u>: (enunciato 1910; confutato 1929; 1957 Papa....)

N 3-var. opt. con ∂N; $\alpha \subset \partial N$ semplice t.c. $[\alpha] = 1 \in \pi_1(N) \Rightarrow \exists D \cong D^2 \subset M$ propriamente embedded t.c. $\partial D = \alpha$.

$\Sigma \subset N$ è prop. emb. se $\partial \Sigma = \Sigma \cap \partial N$





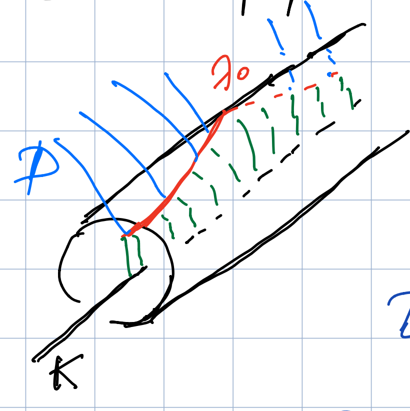
Cor: $\pi_1(E(K)) = \mathbb{Z} \Rightarrow K = \bigcirc$

Dim: $\exists\, \lambda_0 \subset \partial E(K) = \partial U(K) \qquad [\lambda_0] = 0 \in \mathbb{Z} = H_1(E(K))$

$\pi_1(E(K)) = \mathbb{Z} \Rightarrow [\lambda_0] = 0 \in \pi_1(E(K))$

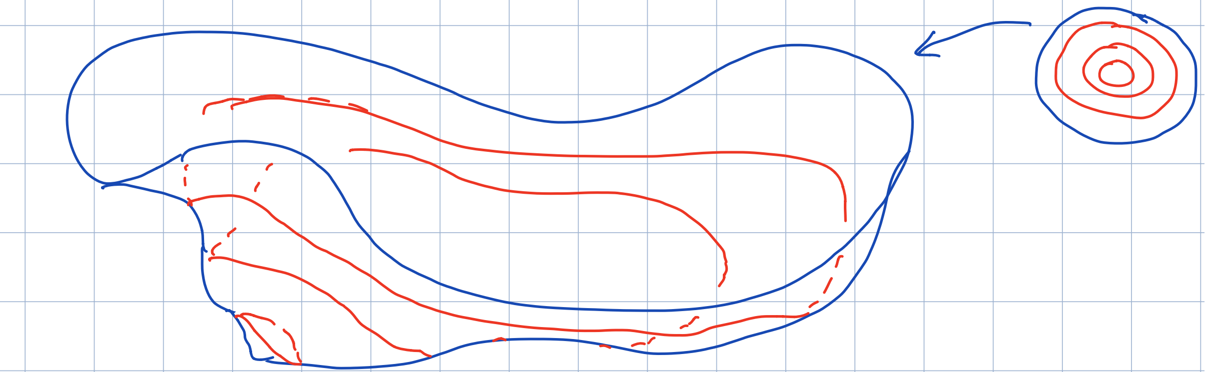
$\xRightarrow{\text{Dehn}}$ $\lambda_0 = \partial D$ $\quad D$ prop. emb. in $E(K)$.

$\Rightarrow$ anche K



$D' = D \cup$ (nastro con $\partial = \lambda_0 \cup K$ in $U(K)$)

$\partial D' = K$, D' embedded in S^3

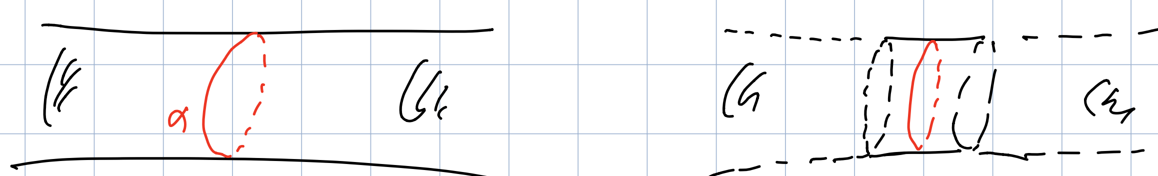


$\Rightarrow K$ banale. ▨

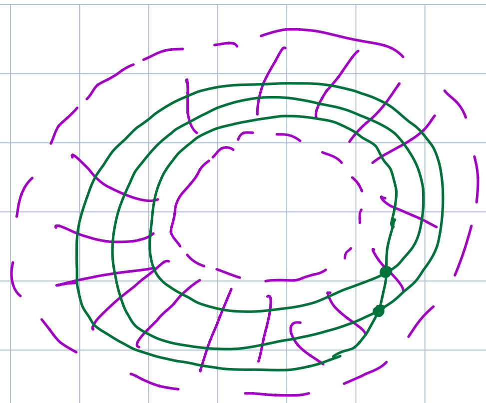
Teo dell'anello: data M (anche non cpt) con ∂M
$f: D^2 \to M$ t.c. $\boxed{f(S^1) = f(D^2) \cap \partial M}$
e $f(S^1) \neq 1 \in \pi_1(\partial M) \Rightarrow \exists$ una f embedding con le stesse proprietà.

Anello $\Rightarrow$ Dehn: sia $\alpha \subset \partial N$ semplice t.c. $[\alpha] = 1 \in \pi_1(N)$.

Pongo $M = (N \setminus \partial N) \cup$ (anello aperto intorno ad α)

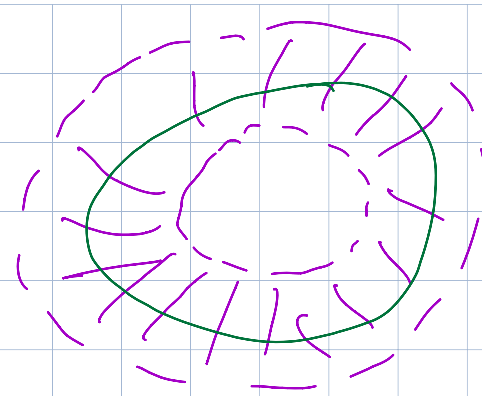


Anello: $\exists D$ prop. embedded in N t.c. $\partial D \neq 1 \in \pi_1(\partial N)$
∂N = anello intorno ad α; l'unica curva semplice in un anello non banale nel π_1 è il cuore / isotopie:



$\pm 3 \in \pi_1(\text{anello}) = \mathbb{Z}$

non semplice



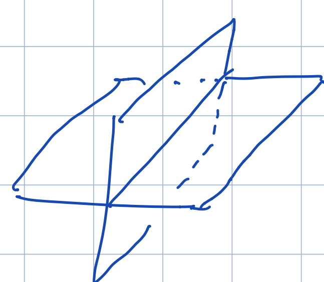
$\pm 1 \in \pi_1(\text{anello}) = \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ posso supporre $\partial D = \alpha$.

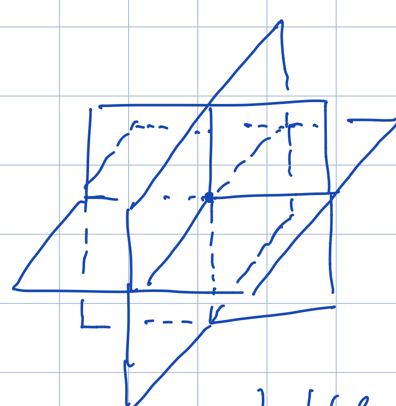
——— o ———

Idea: dato un disco singolare cerco di rimuovere le singolarità.

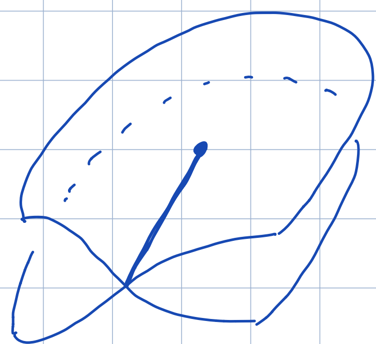
- A meno di perturbazione le singolarità sono:



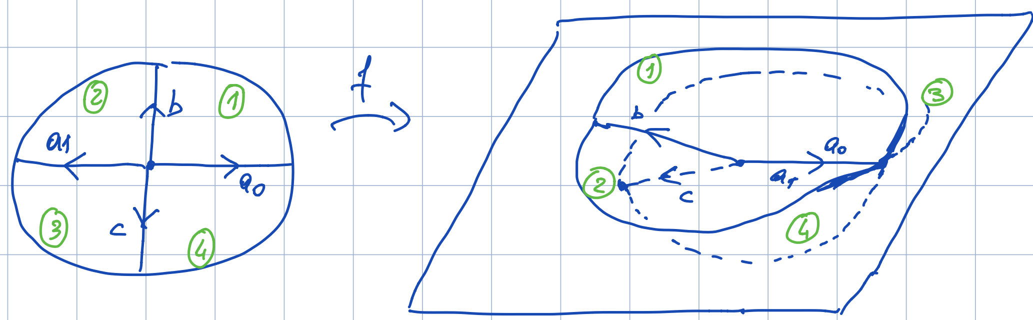
linee pti doppi



pto triplo



pto di ramif. doppio



Dehn: rimuovere queste (baco per pti tripli)

Lem: per una varietà X n-dim connessa sono equivalenti:

(a) $H_1(X;\mathbb{Z}/2)\neq 0$

(b) $\exists\varphi:\pi_1(X)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/2$

(c) $\exists G<\pi_1(X)$ con $[\pi_1(X):G]=2$

(oss: tale G è sempre $G\triangleleft\pi_1(X)$)

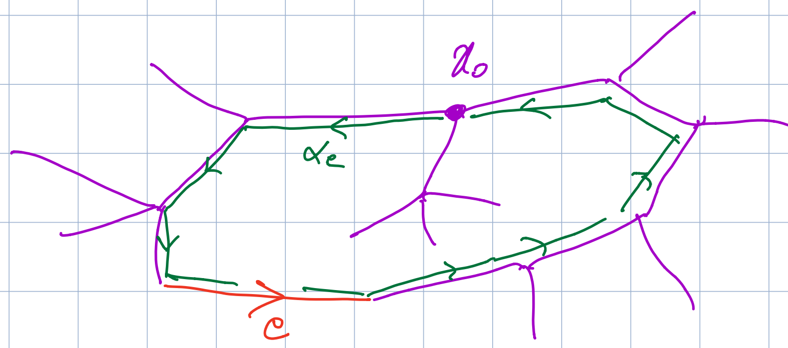
(d) $\exists Y\to X$ rivestimento doppio

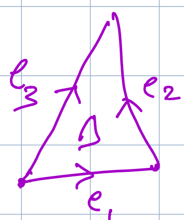
(oss: in tal caso ho sempre che il riv. è dato dall'azione di $\tau: Y \circlearrowleft$ $\tau^2=id$ senza pti fissi $Y\to Y/_{\langle\tau\rangle}=X$)

$\langle\tau\rangle = \mathbb{Z}/2$

Idea: X triangolato, $T \subset X^{(1)}$ albero max

$$\pi_1(X) = \langle \{\alpha_e : e \in X^{(1)} \setminus T\} \mid \{r_\Delta : \Delta \in T^{(2)}\} \rangle$$





$r_\Delta : e_1 \cdot e_2 \cdot e_3^{-1} = 1$ $\quad$ ($e_j = 1$ se $e \in T$)

$$H_1(X;\mathbb{Z}/2) = \langle \{\beta_e : e \in X^{(1)} \setminus T\} \mid \beta_e^2 = 1 \quad [\beta_e, \beta_{e'}] = 1 \quad \{r_\Delta : \Delta \in X^{(2)}\} \rangle$$

(a) $\Rightarrow$ (b) $\quad H_1(X;\mathbb{Z}/2) \neq 0$ ha duale $\neq 0$

$\psi : H_1(X;\mathbb{Z}/2) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$

$$\varphi : \pi_1(X) \xrightarrow{p} H_1(X;\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/2$$

(b) $\Rightarrow$ (a) $\quad$ stessa cosa

(b) $\Leftrightarrow$ (c) $\quad \varphi \longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)$

(c) $\Leftrightarrow$ (d) $\quad G \longleftrightarrow Y = \tilde{X}/G$. $\blacksquare$

Thm: M $\quad f: D^2 \to M \quad f(S^1) = f(D^2) \cap \partial M \neq 1 \in \pi_1(\partial M)$

$\Rightarrow \exists\, f$ embedding proprio con stesse proprietà.

Dim: "costruzione di una torre di rivestimenti doppi":

- $M_0 = M \qquad f_0 = f: D^2 \to M_0 \qquad f_0(\partial D^2) \neq 1 \in \pi_1(\partial M_0)$
- data $f_j : D^2 \to M_j$ pongo $V_j = U(f_j(D^2))$ (cpt)

  $H_1(V_j; \mathbb{Z}/2) = 0$ mi fermo

  $H_1(V_j; \mathbb{Z}/2) \neq 0$ prendo $p_{j+1} : M_{j+1} \xrightarrow{2:1} V_j$

$$\begin{tikzcd} & M_{j+1} \arrow[d, "p_{j+1}"] \\ D^2 \arrow[ur, dashed, "f_{j+1}"] \arrow[r, "f_j"'] & V_j \end{tikzcd}$$

$(D_j = f_j(D^2))$

Claim: la costruzione si ferma.

Opero in cat. PL: suppongo V_0 triangolato, D^2 anche $f_0 : D^2 \to V_0$ simpliciale e ogni M_{j+1} triangolata sollevando da V_j $\Rightarrow$ anche f_{j+1} è simpliciale. Ora

- D_j ha $\leq$ simplessi rispetto a D^2 ✓
- D_{j+1} ne ha strettamente di più di D_j

$$M_{j+1} \xrightarrow{p_{j+1}} M_{j+1}/_{\tau_{j+1}} = V_j \quad ; \quad \tilde{D}_{j+1} = p_{j+1}^{-1}(D_j)$$

M_{j+1} è intorno reg. di $\tilde{D}_{j+1}$ $\Rightarrow$ $\tilde{D}_{j+1}$ connesso

$\tilde{D}_{j+1} = D_{j+1} \cup \tau_{j+1}(D_{j+1})$

$\Rightarrow D_{j+1}$ e $\tau_{j+1}(D_{j+1})$ hanno simplesso in comune $\sigma, \sigma' \in D_{j+1}$ $\sigma' = \tau_{j+1}(\sigma)$

σ, σ' simplessi di D_{j+1} che sollevano lo stesso di D_j

$\Rightarrow D_{j+1}$ ne ha di più.

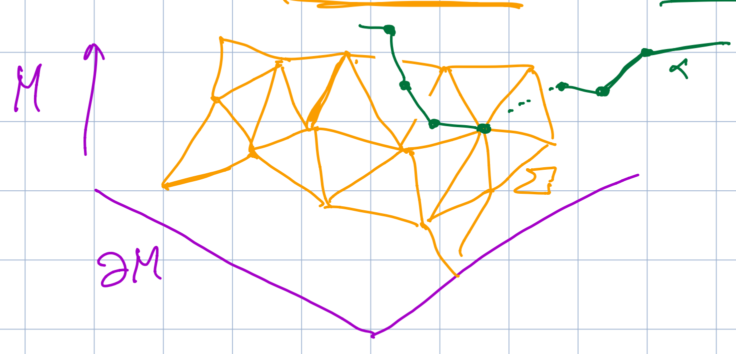
In cima ho $H_1(V_k; \mathbb{Z}/2) = 0$. Succ. esatta:

$$\begin{array}{ccccc} H_2(V_k, \partial V_k; \mathbb{Z}/2) & \to & H_1(\partial V_k; \mathbb{Z}/2) & \to & H_1(V_k; \mathbb{Z}/2) \\ \|{*} & & & & \| \\ H_1(V_k; \mathbb{Z}/2) & & & & 0 \end{array}$$

$*$: (1) Poiché $\mathbb{Z}/2$ campo $H_1(V_k; \mathbb{Z}/2) \cong H_1(V_k; \mathbb{Z}/2)'$

(2) (dualità di Poincaré)

$$H_2(V_k, \partial V_k; \mathbb{Z}/2) \cong H_1(V_k; \mathbb{Z}/2)'$$



$[\Sigma]([\alpha]) = \#\Sigma \pitchfork \alpha \in \mathbb{Z}/2$

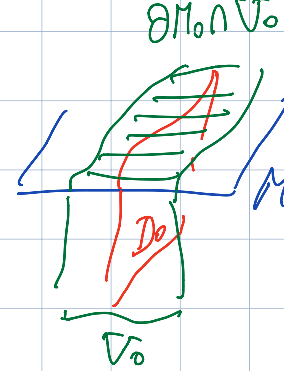
$\Rightarrow H_1(\partial V_k; \mathbb{Z}/2) = 0 \quad \Rightarrow \partial V_k \cong \bigcup_{\text{sfere}} S^2$

<u>Ricordo costruzione</u>: $\quad p_j : M_j \to V_{j-1}$

$V_j = U(D_j) \subset M_j$

pongo $\bar{p}_j = p_j|_{V_j}$.

$\partial M_0 \cap V_0$ = sottosuperficie di ∂V_0



$\bar{p}_1^{-1}(\partial M) = p_1^{-1}(\partial M \cap V_0)$ = sottosup. di ∂M_1

$p_2^{-1}(p_1^{-1}(\partial M \cap V_0))$ = sottosup. di ∂M_2

$$\begin{gathered} p_2^{-1}(p_1^{-1}(\partial M \cap V_0)) \\ \parallel \\ \bar{p}_2^{-1}(\bar{p}_1^{-1}(\partial M)) \\ \parallel \\ (\bar{p}_1 \circ \bar{p}_2)^{-1}(\partial M) \end{gathered}$$

.... $(\bar{p}_1 \circ \dots \circ \bar{p}_j)(\partial M)$ sottosuperficie di ∂M_j

Chiamo F_j la sua componente che contiene $f_j(\partial D^2)$

$$N_j = \mathrm{Ker}\left(\pi_1(F_j) \xrightarrow[\text{indotto da } \bar{p}_1 \circ \dots \circ \bar{p}_j]{} \pi_1(\partial M) \right)$$

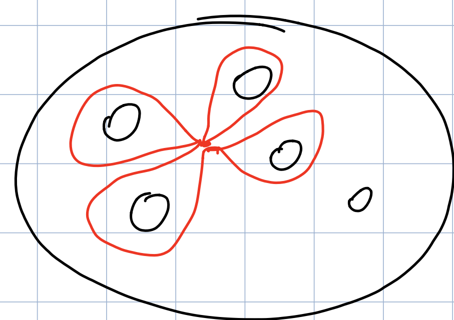
$\bar{p}_1 \circ \dots \circ \bar{p}_j \circ f_j = f_0 = f \qquad [f_0] \neq 1 \in \pi_1(\partial M_0)$

$\Longrightarrow$ N_j sottogruppo normale proprio di $\pi_1(F_j)$.

In cima ho $F_K \subset \partial V_K$ = unione di sfere S^2

$\Longrightarrow F_K \subset$ sfera

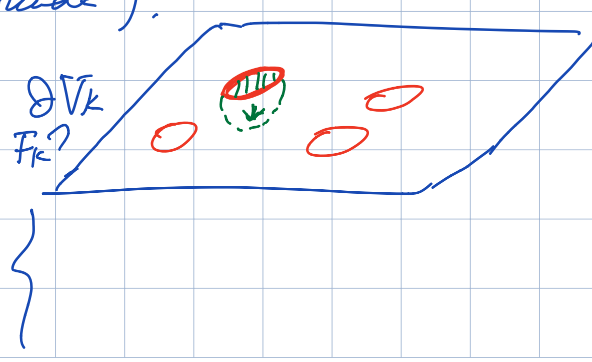
$\Longrightarrow$ è una sfera con buchi



Ora $\pi_1(F_K)$ è generato dai bordi dei buchi
(in realtà serve pto base)

$\Longrightarrow$ il bordo γ di uno dei buchi <u>non</u> appartiene a N_K

(affermazione sensata perché cambiando pto base ho comunque che N_K è normale).



Spingendo l'interno di un disco che sta in ∂V_K ed è bordato da tale γ verso l'interno di V_K trovo

$$\boxed{g_K : D^2 \to V_K \text{ embedding proprio t.c. } g_K(\partial D^2) \not\subset N_K.}$$

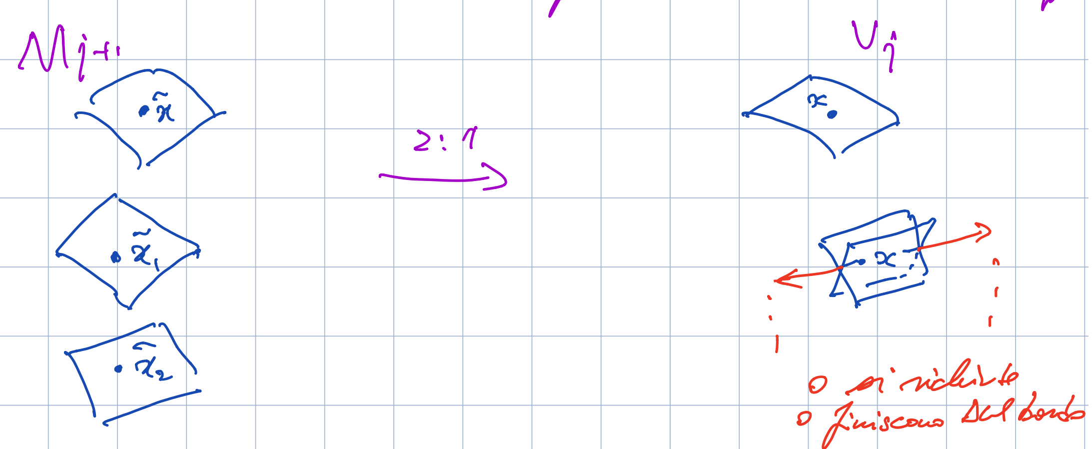
<u>Discesa</u>: suppongo $g_{j+1} : D^2 \to V_{j+1}$ embedding proprio t.c. $g_{j+1}(\partial D^2) \not\subset N_{j+1}$

dimostro che esiste g_j ..... analogo.

Pongo inizialmente $\tilde{g}_j = p_{j+1} \circ g_{j+1}$

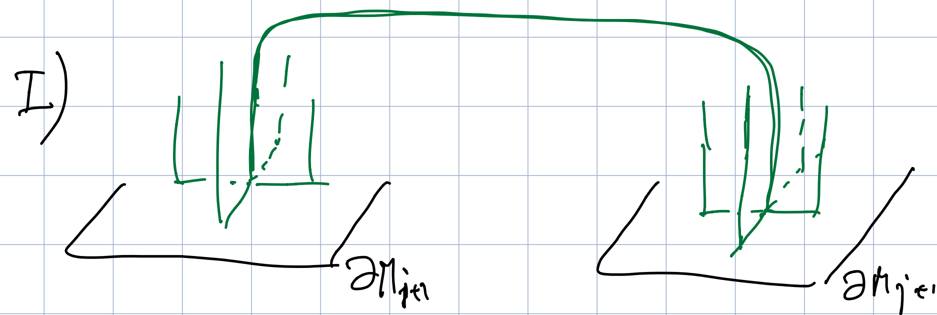
poiché $N_j = p_{j+1}(N_{j+1})$ ho $\tilde{g}_j(\partial D^2) \not\subset N_j$

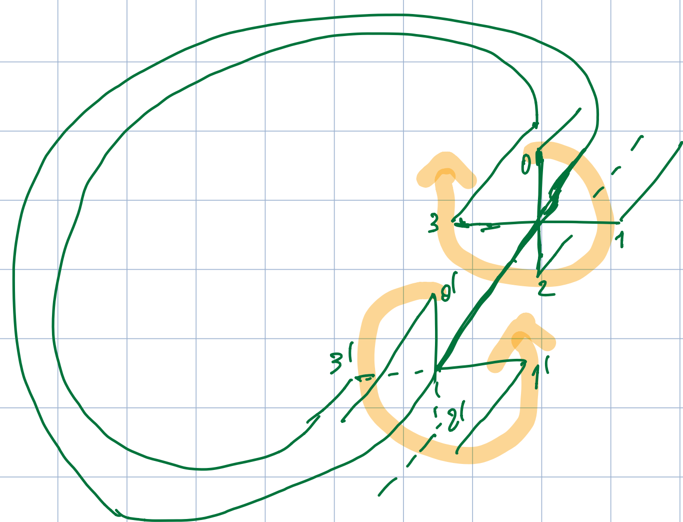
però proiettando posso avere creato singolarità, ma a meno di perturbazioni solo linee doppie;



Possibili configurazioni di due linee di pti doppi

I)





0,1,2,3 possono richiudersi con:

II. $0', 1', 2', 3'$

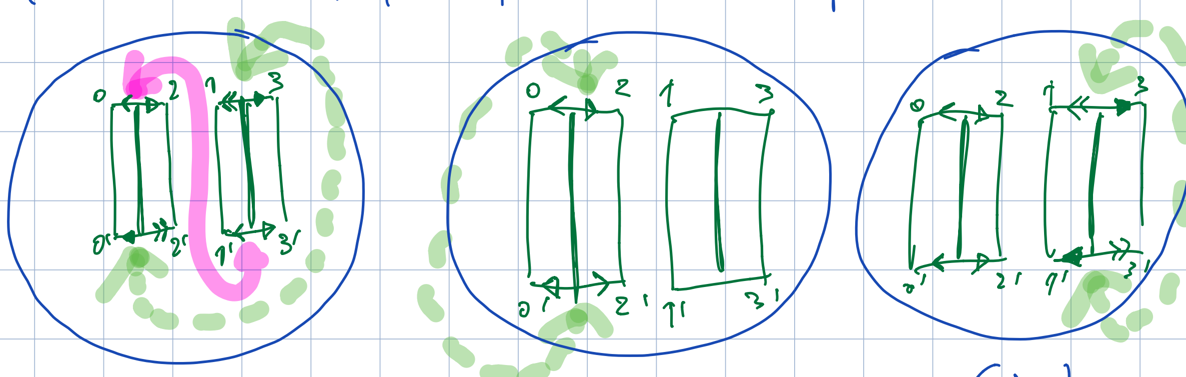
(i) $1', 2', 3', 0'$

(ii) $2', 3', 0', 1'$

III. $1', 0', 3', 2'$

(iii) $0' 3' 2' 1'$

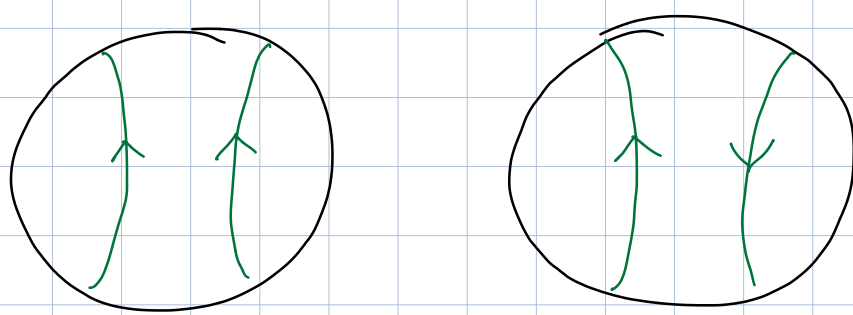
Provo che (i), (ii), (iii) sono impossibili

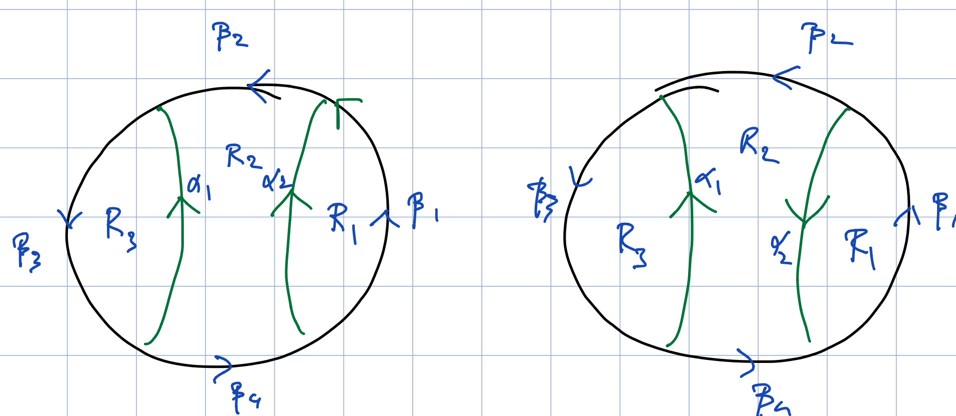


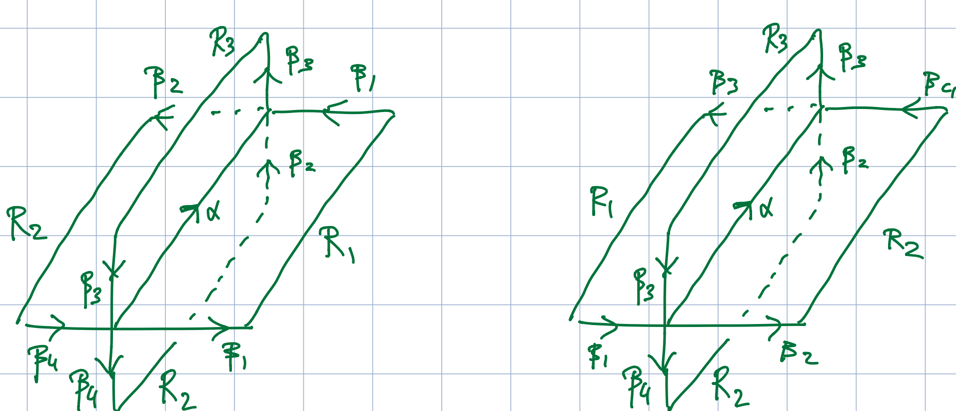
(i) (ii) (iii)

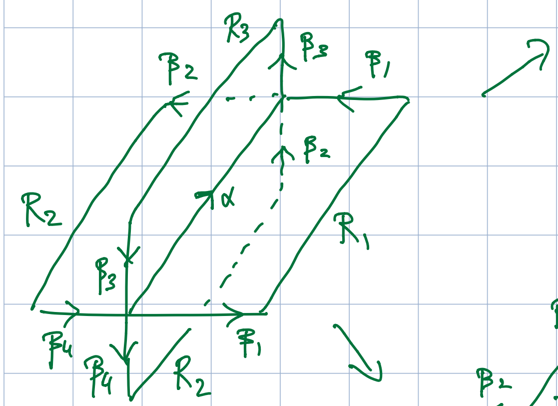
Nei casi I, II, III mostro come modificare la mappa $\tilde{g}_j$ eliminando l'arco o loccio α di punti doppi. Iterando per tutti gli archi ottengo g_j.

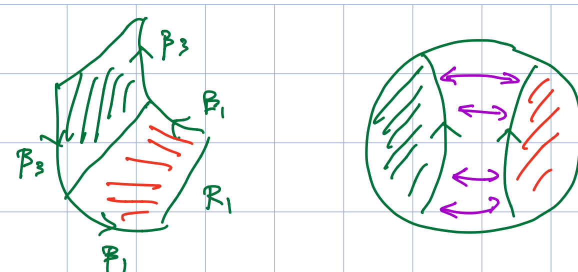
I. Oriento l'arco α di pti doppi e sollevo tale orientazione al disco D^2: due casi:



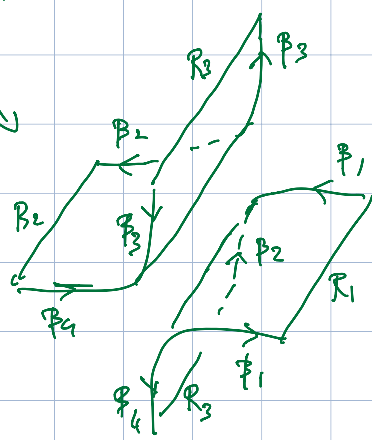


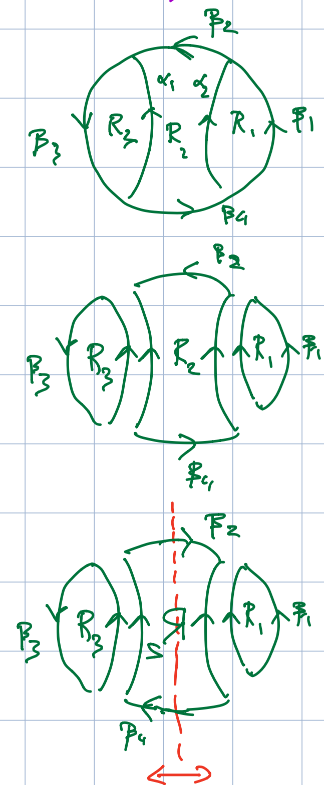


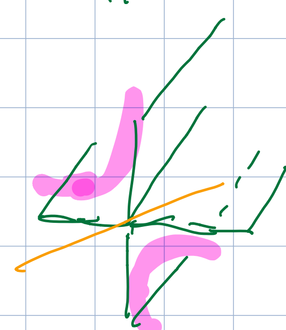




$$\delta_1 = \beta_1 \beta_3 = \mathrm{Im}(\partial D^2)$$







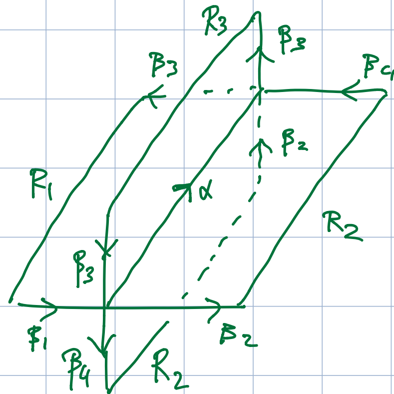
$$\delta_2 = \beta_1 \beta_2^{-1} \beta_3 \beta_4^{-1}$$

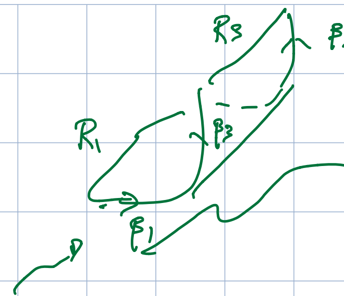
Oss: $N_j \not\ni \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$

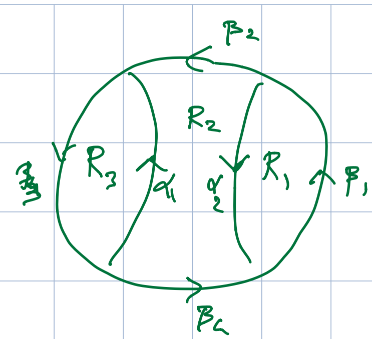
$$= (\beta_1 \beta_3) \cdot \beta_4^{-1} \cdot (\beta_1 \beta_2^{-1} \beta_3 \beta_4^{-1})^{-1} \cdot (\beta_1 \cdot \beta_3) \cdot \beta_4$$

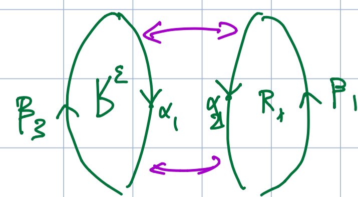
$$= \delta_1 \cdot \beta_4^{-1} \cdot (\delta_1 \cdot \delta_2) \cdot \beta_4$$

Ne segue che δ_1 oppure δ_2 non appartiene a N_j: altrimenti anche $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$.

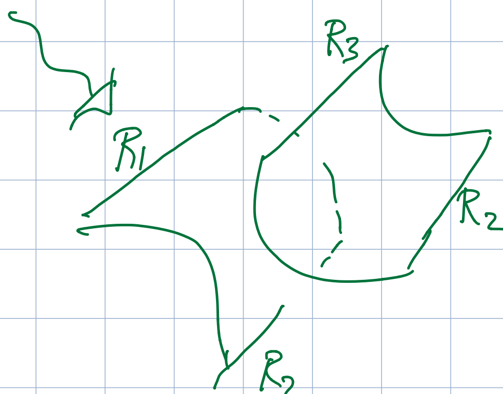


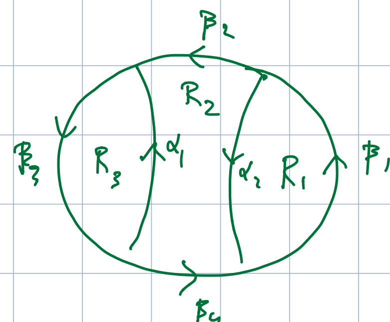


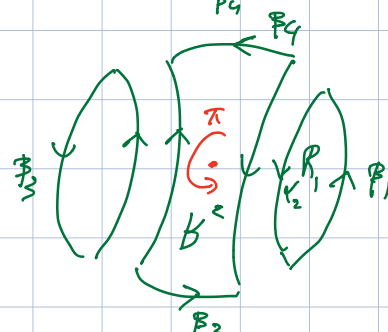




$\delta_1 = \beta_1 \beta_3^{-1}$







$\delta_2 = \beta_1 \beta_4 \beta_3 \beta_2$

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 = \delta_1 \cdot (\beta_3 \beta_4)^{-1} \cdot (\delta_1^{-1} \delta_2) \cdot (\beta_3 \beta_4)$$

δ_1 oppure $\delta_2 \notin N_j$.

Restano le diramazioni da fare in II, III.