

LDT / IUSS 9/4/20

$$[X] = A \cdot [] + A^{-1} \cdot [\text{cross}]$$

$$[O] = (-A^2 - A^{-2}) \cdot [1]$$

$$[\emptyset] = 1$$

relazioni skein
(polinomi HOMFLY-PT)
+ Jones

Nota: $[]$ inv. per link con framing
 $[\text{cross}] = (-A^3) \cdot [1]$

Def: $p(\vec{L}) = -A^{-3w(\vec{D})} \cdot [\vec{D}]$
dove D è diagramma di $\vec{L}$

$$w(\vec{D}) = \sum_{\text{down}} 1 - \sum_{\text{up}} 1 \quad (\text{Writhe})$$

è invariante di link orientati.

Oss: per nodo K è ben definito $p(K)$.

$$w\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right) = w\left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \swarrow \searrow \end{array}\right)$$

Chiamo $\bar{D}$ = diagramma D con sopra/sotto scambiati.

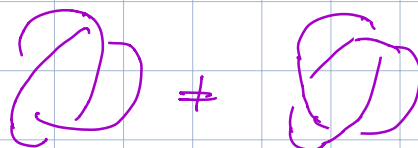
Oss: $p(\bar{D})$ è ottenuto da $p(D)$ cambiando
segno agli esponenti di A . ($A \leftrightarrow A^{-1}$)

Gufatti:

$$\begin{aligned} [\chi] &= A \cdot [>()] + A^{-1} \cdot [\asymp] \\ [\chi] &= A \cdot [\asymp] + A^{-1} \cdot [>()] \\ [01] &= (-A^2 - A^{-2}) \cdot [1] \end{aligned}$$

anche il contributo del writhe OK

Teo: il triangolo è chirale:



Dimo: $p(\text{triangle}) = (-A^{-9}) \cdot [\text{triangle}]$

$$= -A^{-9} \cdot \left(A^3 \cdot [\text{triangle}] + 3A \cdot [\text{triangle}] + 3A^{-1} \cdot [\text{triangle}] + A^{-3} \cdot [\text{triangle}] \right)$$

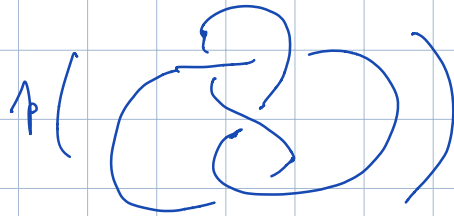
$$= -A^{-9} \cdot \left((A^3 - 3A^{-1}) \cdot (-A^2 - A^{-2}) + 3A + A^{-3} \cdot (A^2 - A^{-2})^2 \right) \cdot (-A^2 - A^{-2})$$

$$= \underbrace{(A^{-4} + A^{-12} - A^{-16})} \cdot \underbrace{(-A^2 - A^{-2})}$$

non è simmetrico per $A \leftrightarrow A^{-1}$
 $\Rightarrow$ chirale.



Esercizio: calcolare



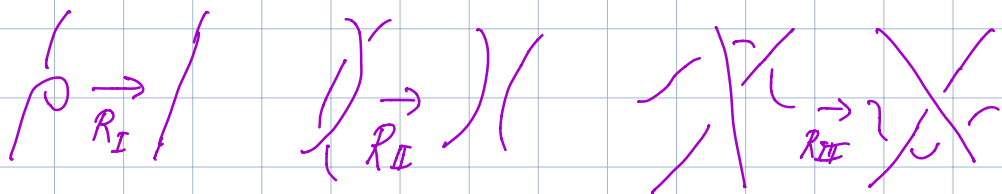
verificando che Σ sia un rispetto $A \Leftrightarrow A^\dagger$.

K nodo/link con diagramma D .

$c(K) = \# \text{incroci minimo possibile per diagrammi di } D$.

Q: un diag. minimale D_0 è unico? [No]

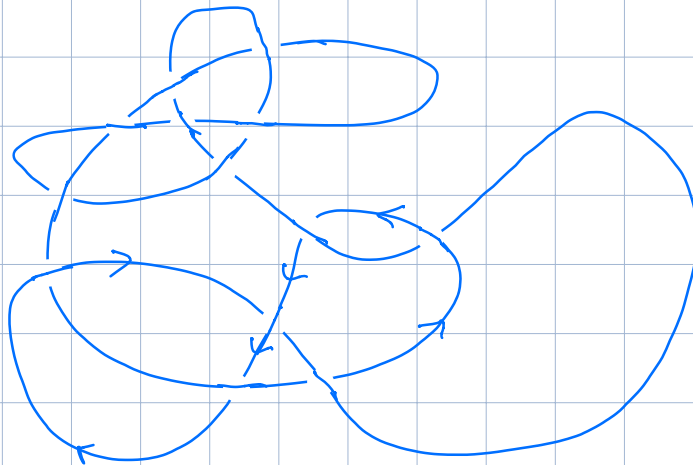
Q: dato un D con $c(D) > c(K)$ posso andare da D a un D_0 minimale senza aumentare gli incroci?



[No]

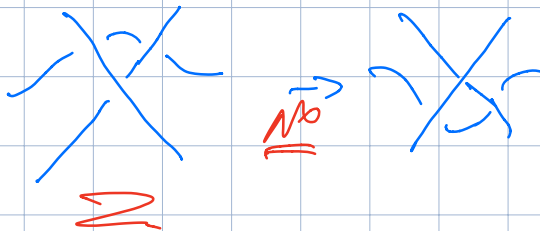
Tentativi aumentando combinazioni più complesse
di incroci ... problema aperto.

Def: un diagramma è alternante se percorrendolo si alternano sopra e sotto:



esercizio:
ogni diagramma
con scambi
dirente
alternante

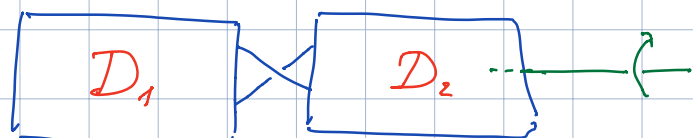
Che mosse posso applicare a D alternante?



Q: $D \text{ alt} \xrightarrow{R_I \text{ discor.}} D' \text{ alternante}$

È minimale / unico?

Chiamo alternante ridotto un diagramma alt. che non abbia
incroci "mugatory":





Teo (I congettura di Tait) : due diagrammi alternanti ridotti dello stesso link hanno stesso numero incroci.

Fatto: un diag. alt. ridotto è minimale ed è l'unico.

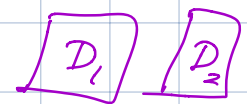
Fatto: non tutti i link sono alternanti.

Def: $p(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$; $\text{Span}(p(A)) = \max \{k: \text{coeff}(A^k) \neq 0\}$
 $-\min \{h: \text{coeff}(A^h) \neq 0\}$

Def: $s(L) = \text{Span}(p(\bar{L})) = \text{Span}([D])$.
 $\forall D$ diagramma

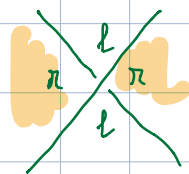
Teo segue da:

Prop: D ridotto alternante non-split



$$s(L) = 4 \cdot (c(D) + 1).$$

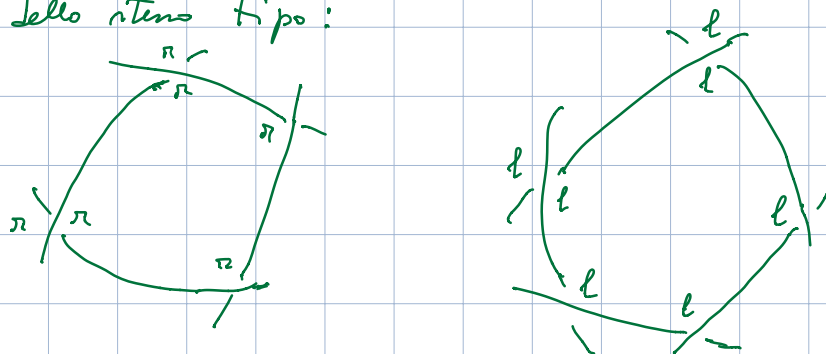
Dimo: $D \subset S^2$, $S^2 \setminus D = \cup \text{dischi}$. Marco
 gli angoli dei dischi:



$$[D] = \sum_{\sigma \text{ stati}} A^{\ell(\sigma) - n(\sigma)} \cdot A \cdot (-A^2 - \bar{A}^2)^{|\sigma|}$$

stato ℓ : $\pi \cup \ell(\pi)$ stato π : $\begin{matrix} \ell \\ \pi \\ \ell \end{matrix}$

Nota che essendo D alternante ogni regione ha angoli tutti dello stesso tipo:

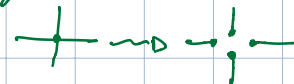


Chiamo: $m = c(D)$

$L = \#$ regioni con angoli l

$R = \#$ regioni angoli π

D quadrivalente



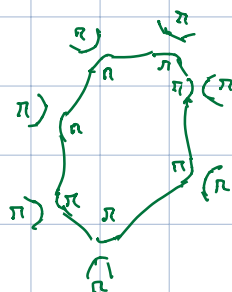
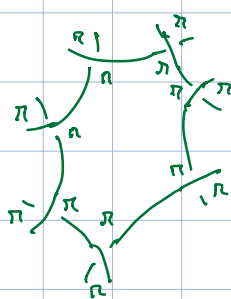
$$4c(D) = 2 \# \text{ vertici } D$$

$$\chi(S^2) = 2 \Rightarrow c(D) - 2c(D) + (L + R) = 2$$

$$\Rightarrow L + R = m + 2$$

Se $\sigma =$ tutti i contributi è

$$A^m \cdot A^{-0} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|\sigma|}$$



ho R regioni di tipo π (quelle inziali) e una sola di tipo l

$$\Rightarrow |\sigma| = R$$

$$\Rightarrow \text{prel più alto} = A^{m+2R}$$

Analogo: se $\tau =$ tutti π contributo è

$$A^{+0} \cdot A^{-m} \cdot (-A^2 - A^{-2})^L$$

$\Rightarrow$ grado più basso A^{-m-2L}

$$\Rightarrow \lambda(L) = m + 2R - (-m - 2L)$$

$$= 2m + 2(R+L) = 2m + 2(m+2) = 4m + 4$$

Per concludere : affermo che se ho stato σ nell'espressione

$$A^{l(\sigma)} \cdot A^{-r(\sigma)} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|\sigma|-1}$$

uso quindi
come def.
di $[\cdot]$

se sostituisco una l con una r

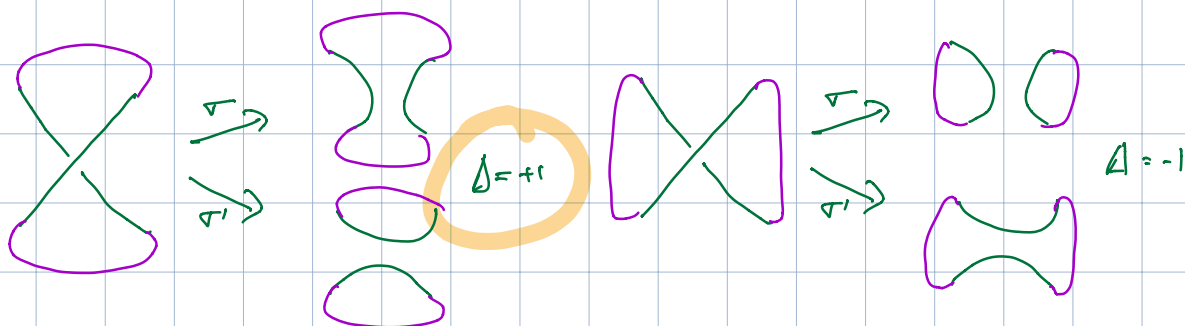
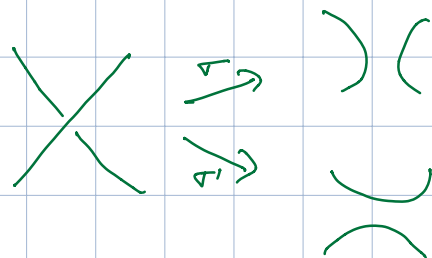
- il grado max per σ' è $\leq$ quello per σ
- se $\sigma =$ tutti l vale $<$ stretto.

(analogo π enunciato da $\bar{e}$ fine).

$$\begin{aligned} \text{Grado max per } \sigma' \text{ e } & l(\sigma') - r(\sigma') + 2|\sigma'| \\ &= l(\sigma) - 1 - (r(\sigma) + 1) + 2|\sigma'| \\ &= \underbrace{l(\sigma) - r(\sigma) + 2(|\sigma| - 1)}_{\text{grado max per } \sigma} - 2(\underbrace{|\sigma| - |\sigma'| + 1}_{\neq}) \end{aligned}$$

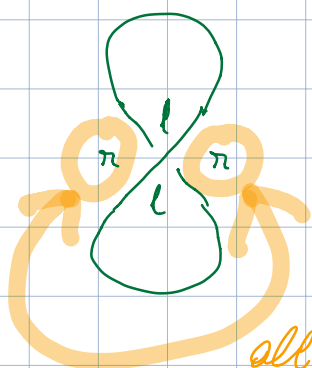
devo vedere che
lui è ≥ 0 e ≥ 0
se $\sigma =$ tutti l .

Esamino invece dove differiscono :



$$\Rightarrow |\sigma'| \leq |\sigma| + 1$$

Supponiamo $\sigma = \text{tutti } l$; facciamo tutte le semplificazioni
tranne dove differiscono: può succedere il caso $\Delta = +1$?



ora sono angoli della stessa
regione π
ma le altre semplificazioni
erano $l \Rightarrow$ usai ferro
due a districare.

all'inizio erano angoli di regioni π distinte

↓
altrimenti avevo
un incrocio
multiplo

No!



Teo (Jordan-Schoenflies): $\alpha: S^1 \rightarrow S^2$ continue

iniettiva $\Rightarrow S^2 \setminus \text{Im}(\alpha) = B_1 \cup B_2$

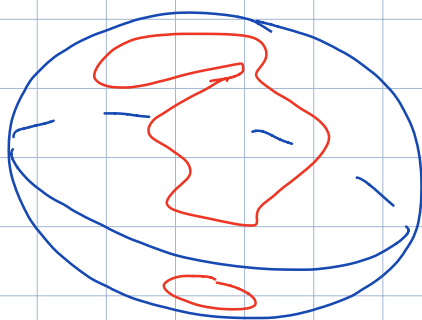
$\partial B_j = \text{Im}(\alpha)$, $\overline{B_j} \cong D^2$.

Difficile
facile per α
DIFF o PL

Fatto: la versione TOP è falsa in dim superiore:

$\exists S^2 \xrightarrow{\alpha} S^3$ t.c. $S^3 \setminus \text{Im}(\alpha) = B_1 \cup B_2$

$\overline{B_j} \cong D^3$ (sfere compatte di Alexander) -
(due versioni DIFF e PL)



DITO per α regolare
($\alpha'(x) \neq 0 \ \forall x$)

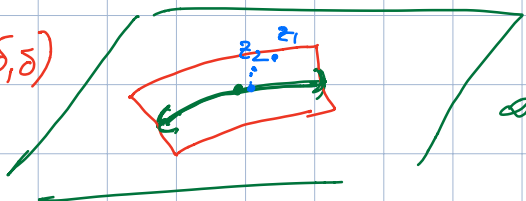
Passo 1: α non singolare (noto: $S^1 \rightarrow S^2$ continue regolari esistono)

Prendo $x \in S^1$; usando $\alpha'(x) \neq 0$ trovo arco $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$
su cui α è iniettiva e la immagine me arco "quasi dritto"

Prendo intorno $\alpha((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) \times (-\delta, \delta)$

Affermo che per δ piccolo

$\text{Im}(\alpha) \cap$ tale intorno è solo
 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times \{0\}$

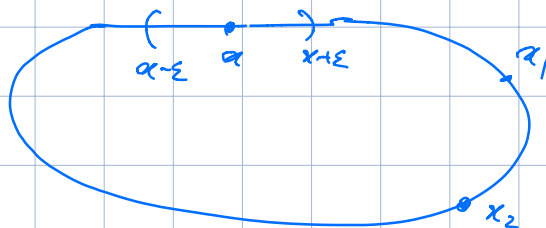


P.f. $\exists z_j \in I_{\text{unb}}(\alpha)$ t.c.

$$z_j \rightarrow \alpha(x)$$

$$z_j = \alpha(x_j) \text{ wlog } x_j \rightarrow x_\infty$$

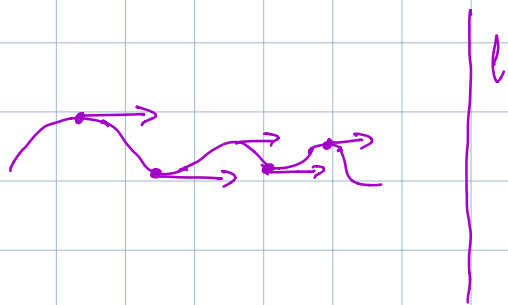
$$x_j \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad x_\infty \neq x \quad \alpha(x_\infty) = \alpha(x) \quad \text{ASSURDO.}$$



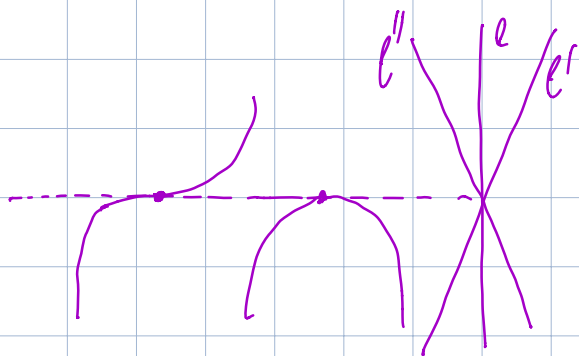
Passo 2: Wlog $\infty \notin I_{\text{unb}}(\alpha)$, $\alpha: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$;
basta vedere che $I_{\text{unb}}(\alpha) = \partial B$ B limitata
 $\overline{B} \cong D^2$.

Fatto: $\exists l \subset \mathbb{R}^2$ t.c. $\beta = \pi_l \circ \alpha$ $\pi_l = \text{proiezione } \perp$

- ha # finito di punti in cui $\beta'(z) = 0$
- in tali punti $\beta''(z) \neq 0$
- i valori di β in tali punti sono $\perp$ a l .

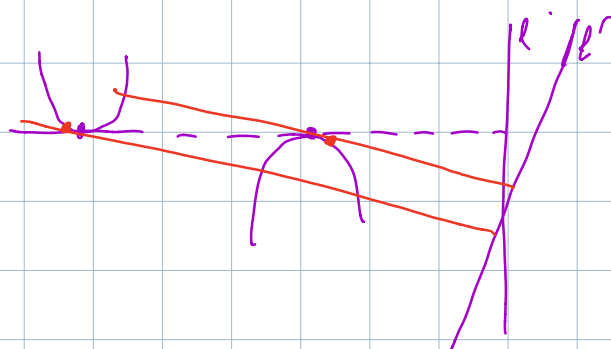


a mano di cambiare
un po' l questo
scompare.



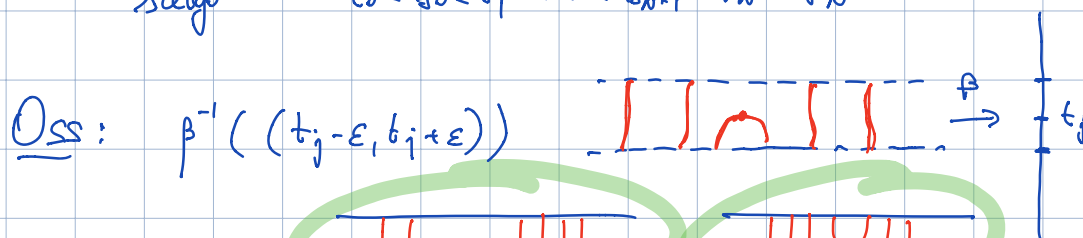
$$y = x^k \quad k \geq 2$$

scompare spostando l

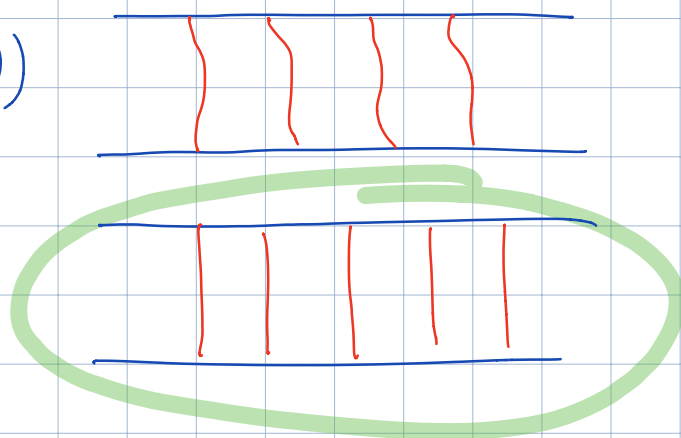


(Teoria di Morse)

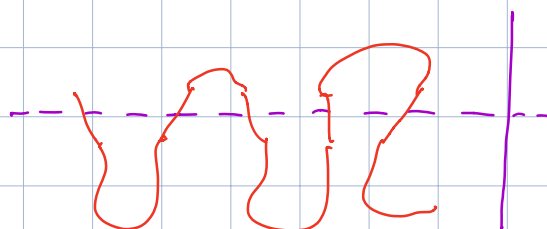
Prendo i valori $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ di ϕ in cui $\phi' = 0$
 scelgo $t_0 < s_0 < t_1 < \dots < s_{N-1} < t_N < t_N$



$\phi^{-1}((t_{j+1} - \varepsilon, t_{j+1} + \varepsilon))$

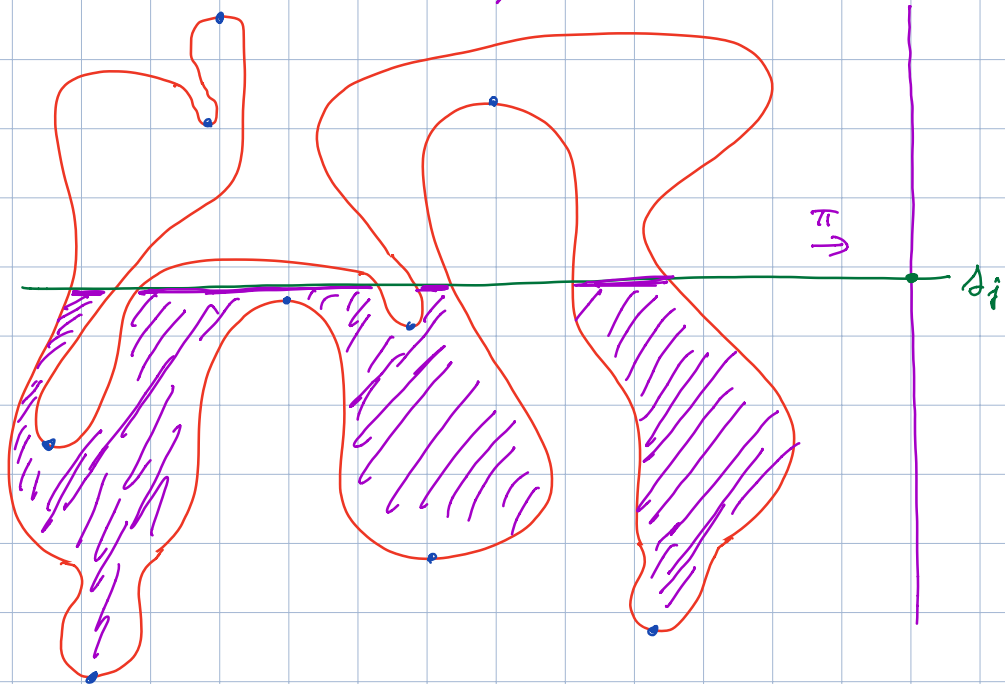


Nota che $\pi^{-1}(s_j) \cap \text{Im}(\alpha)$ è # pari di punti.

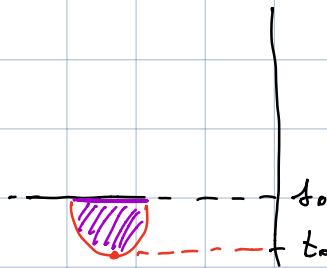


Le chiamo $p_1^{(j)} < \dots < p_{2k_j}^{(j)}$; allora

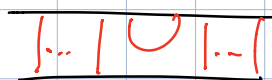
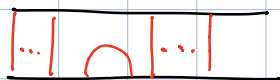
$\text{Im}(\alpha) \cap \pi^{-1}((-\infty, s_j)) \cup ([p_1^{(j)}, p_2^{(j)}] \cup [p_3^{(j)}, p_4^{(j)}] \dots \times \{t_j\})$
 è unione finita di dischi con buchi;

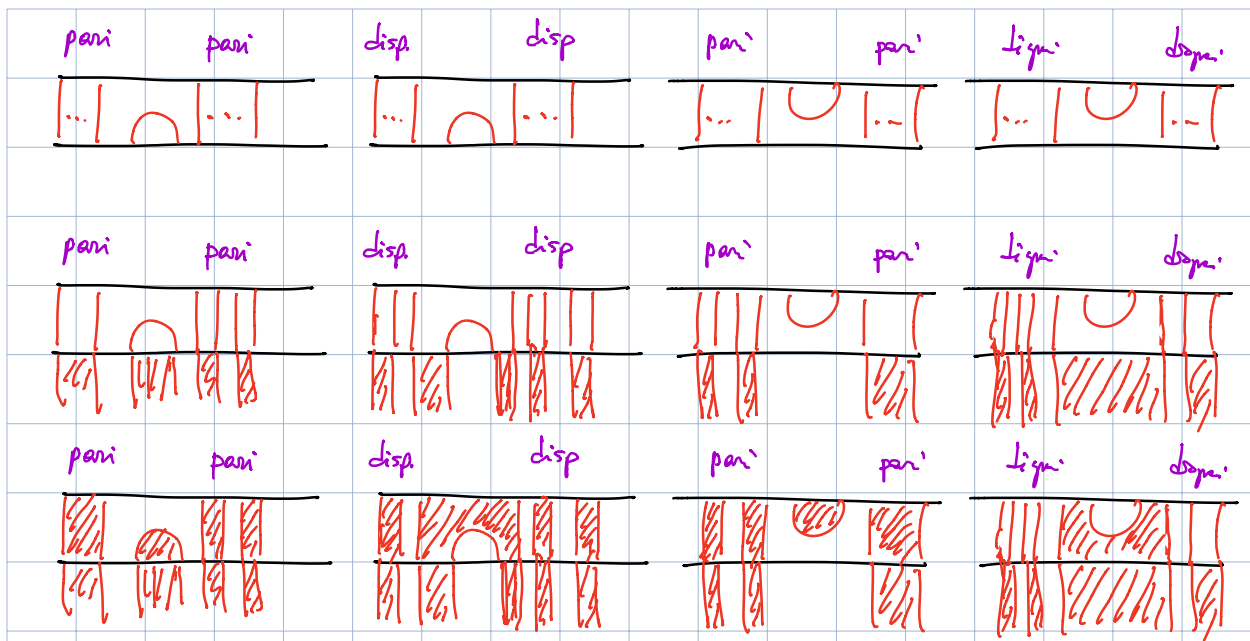


Vediamo per $j=0$



Induttivamente vedo cose accade quando siamo in t_j
 passando da s_{j-1} a s_j





gli stoni

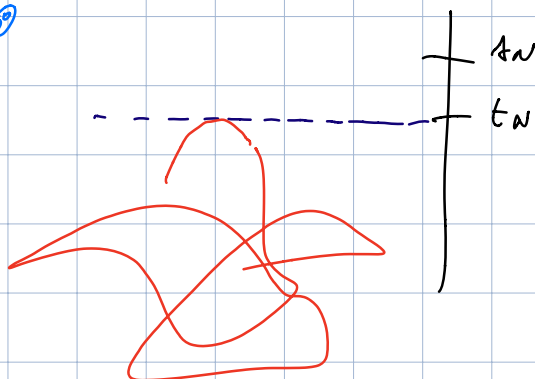
gli stoni fanno
che per una funzione

un disco
nuovo

gli stoni.



Per $j=N$



trovo che $I_a(x)$ è bordo di una union finita di
dischi con buchi: se è connesso $\Rightarrow$ un solo
disco senza buchi.

