LDT – IUSS – 3/4/2020

$\underbrace{(\tilde\Sigma, \Sigma, d, n;\ \pi_1, \dots, \pi_n)}_{\text{soddisfa 4 condiz. nec.}}$ $\quad \exists f : \tilde\Sigma \to \Sigma$ che lo realizza

RH + ovvie ... + $n \cdot d \equiv \tilde n \ (2)$

$\Sigma = g \cdot T$

Teo: $\exists f \Longleftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \beta_g, \theta_1 \dots \theta_n$ t.c. $\prod [\alpha_p, \beta_p] \cdot \prod \theta_i = id$

θ_i str. cicl. π_i, $\langle \dots \rangle$ trans su $\{1, \dots, d\}$

Teo: $\Sigma = k \cdot \mathbb{P}$; $\exists f \Longleftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta_1 \dots \theta_n$ t.c.

$\prod \alpha_p^2 \cdot \prod \theta_i = id$, θ_i str. cil. π_i, $\langle \dots \rangle$ tran su $\{1 \dots d\}$

$\tilde\Sigma$ orient. $\Longleftrightarrow$ ogni α_p ha cicli solo lunghezze pari.

Prop: $\exists f \Rightarrow n \cdot d \equiv \tilde n \ (2)$.

Dim: $\mathrm{sgn}((1, \dots, m)) = m-1 \Rightarrow \mathrm{sgn}(\theta_i) = d - l_i$

$\Rightarrow \mathrm{sgn}(\theta_1 \dots \theta_n) = \underline{\underline{n \cdot d - \tilde n}}$; ma $\prod \theta_i = (\prod \alpha_p^2)^{-1} \Rightarrow$ pari. $\blacksquare$

Prop: $\big((n-3)T, S, 4, n;\ \underset{\theta_1}{[2,2]}, \dots, \underset{\theta_{n-1}}{[2,2]}, \underset{\theta_n}{[3,1]}\big)$ eccezionale.

Dim: $\theta_1, \dots, \theta_{n-1} = (ij)(kl)$

$\theta_n = (ijk)(l)$ $\qquad \theta_1 \dots \theta_n = id$

$((12)(34)) \cdot ((12)(34)) = id$

$((12)(34)) \cdot ((13)(24)) = (14)(23)$. $\blacksquare$

Thm 1: $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, d, n; \pi_1 \dots \pi_n)$ realizzabile se $\chi(\Sigma) \leq 0$ e $\tilde{\Sigma}, \Sigma$ hanno stessa orientabilità.

Cor: realizzabile con $\chi(\Sigma) \leq 0$ anche se hanno opposta orientab.

Dim:

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{orient.}}{\tilde{\Sigma}} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & \bar{\Sigma} \arrow[d, "p"] \\ & \underset{\text{non-orient}}{\Sigma} \end{tikzcd}$$

: il dato con $\tilde{\Sigma}, \Sigma$ ne induce uno con $\tilde{\Sigma}, \bar{\Sigma}$ a cui applico Thm 1.

$\pi_i = \pi_i' \sqcup \pi_i''$

scelgo $g : \bar{\Sigma} \to \bar{\Sigma}$ t.c. $g(\{x_i', x_i''\}) = p^{-1}(x_i)$. ∎

Thm 2: $(\tilde{\Sigma}, \mathbb{P}, d, n; \pi_1 \dots \pi_n)$ realizzabile se $\tilde{\Sigma}$ non orientabile.

Restano: $\Sigma = S$ $\quad$ $\boxed{\Sigma = \mathbb{P}^2, \tilde{\Sigma} \text{ orientabile}}$

si riconduce

Lem: $\theta \in \mathfrak{S}_d$ ℓ cicli $t \geq 0$ $\ell + 2t \leq d$

$\Longrightarrow \exists\, \sigma, \tau$ t.c. $\theta = \sigma \cdot \tau$ $\quad \sigma = d$-ciclo $\quad \tau = (\ell+2t)$-ciclo

Dimo: suppongo $\theta = (1, \dots, a_1)(a_1+1, \dots, a_2) \cdots (a_{\ell-1}+1, \dots, \underset{d}{\underset{\parallel}{a_\ell}})$

Pongo $\delta = (a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_{2t})$

con $b_1 < \dots < b_{2t} \notin \{a_1, \dots, a_\ell\}$.

Noto che $\delta = \delta_0 \cdot \delta_1$

$\delta_0 = (a_1, \dots, a_{\ell-1}, \underset{a_\ell}{\underset{\parallel}{d}})$ $\quad \delta_1 = (b_1, \dots, b_{2t}, d)$

Calcolo $\theta \cdot \delta_0 = (1, \dots, a_1)(a_1+1, \dots, a_2) \dots (a_{\ell-1}+1, \dots, a_\ell)(a_1 \cdots a_\ell)$

$= (1, \dots, a_1, a_1+1, \dots, a_2, a_2+1, \dots) = (1, \dots, d)$

Calcolo $\underline{\theta \cdot \delta} = \theta \cdot \delta_0 \cdot \delta_1 = (1, \dots, d)(b_1, \dots, b_{2t}, d)$

$= (d, b_1+1, \dots, b_2, b_3+1, \dots, b_{2t},$

$1, 2, \dots, b_1, b_2+1, \dots, b_{2t-1}, b_{2t}+1, \dots, d-1) =: \sigma$

$\Rightarrow$ è ancora un d-ciclo.

Basta scrivere $\theta = \sigma \cdot \delta^{-1}$

d-ciclo $\quad (\ell+2t)$-ciclo. $\boxed{///}$

<u>Prop</u>: θ pari $\Rightarrow$ θ si può scrivere come

(a) $\cdot$ $\theta = [\alpha, \beta]$ $\quad \alpha$ d-ciclo

(b) $\cdot$ $\theta = \alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2$ $\quad \alpha_1, \alpha_2$ d-ciclo.

<u>Dimo</u>: θ ha ℓ cicli $\Rightarrow$ $d-\ell$ pari $\Rightarrow$ uso lem. con $t = \frac{d-\ell}{2}$

$\Rightarrow \theta = \sigma \cdot \tau$ $\quad \sigma, \tau$ d-cicli.

- τ, σ^{-1} coniugati $\Rightarrow$ $\tau = \beta \sigma^{-1} \beta^{-1}$

  $\Rightarrow \theta = \sigma \beta \sigma^{-1} \beta^{-1} = [\sigma, \beta]$ $\quad \alpha := \sigma$

- σ, τ coniugati $\Rightarrow$ $\sigma = \alpha_1 \cdot \tau \cdot \alpha_1^{-1}$

  $\Rightarrow \theta = \alpha_1 \tau \alpha_1^{-1} \tau = \alpha_1^2 \cdot (\alpha_1^{-1} \tau)^2$

  $\alpha_2 := \alpha_1^{-1} \cdot \tau$ $\quad \alpha_1 \alpha_2 = \tau$ $\boxed{///}$

<u>Dimo</u>: orient: $\tilde{\Sigma} = g \cdot T$ $\quad g \geq 1$ $\quad$ cerco $\alpha_1 \dots \beta_g$ $\theta_1 \dots \theta_n$

non-orient $\quad k \cdot \mathbb{P}^2$ $\quad k \geq 2$ $\quad$ cerco $\alpha_1 \dots \alpha_k$ $\theta_1 \dots \theta_n$

Scelgo $\theta_1,\dots,\theta_n \in S_d$ a caso con struttura π_i.

$\theta = \theta_1 \cdots \theta_n$ pari

- Applico Prop(a) a θ^{-1} trovando $\theta^{-1} = [\alpha_1, \beta_1]$, α_1 d-ciclo
  scelgo $\alpha_2, \dots, \beta_g = id$ OK

- Applico Prop(b) a θ^{-1} trovando $\theta^{-1} = \alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2$ $\quad \alpha_1 \cdot \alpha_2$ d-ciclo
  scelgo $\alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$; resta da vedere che la $\tilde{\Sigma}$ che essi realizzano è non-orientabile.
  Infatti: $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ è d-ciclo $\Rightarrow$ trovo m t.c.
  $\alpha_1 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^m$ ha un pto fisso $\{1,\dots,d\}$
  $\Rightarrow$ il cammino in $k \cdot \mathbb{P}^2$ dato da
  $a_1 \cdot (a_1 \cdot a_2)^m$ ha un sollevamento che è laccio
  $\Rightarrow$ esso è orient-rev $\Rightarrow \tilde{\Sigma}$ non orient. $\blacksquare$

Problema che rimane: $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, d, n; \pi_1, \dots, \pi_n)$

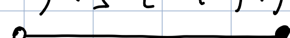
Prop: se $d = a \cdot b$ con $a, b > 1$ $\Rightarrow \exists\, (S, S, d, 3; \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ eccezionale

Dim: $[\underbrace{a, \dots, a}_{b}]\ [\underbrace{b+1}_{1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{ab-(b+1)}]\ [\underbrace{k \cdot a, (b-k)a}_{2}]$

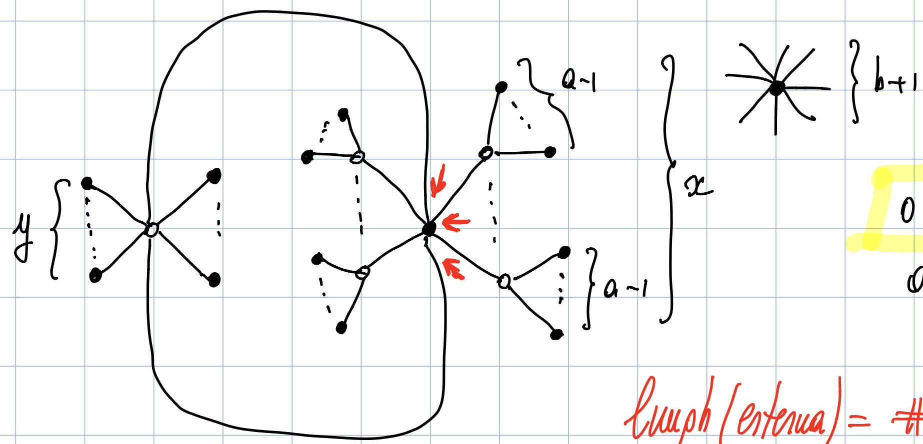
$\underbrace{\qquad}_{a \cdot b - b}$

$\longrightarrow 2 - (a \cdot b + 2) = a \cdot b(2-3)$ ✓

Cerco DE che realizzi $[\overbrace{a, \dots, a}^{b}]\ [b+1, 1, \dots, 1]$



Deve essere connesso.



$0 \le y \le a-2$

$0 \le x \le b-1$

$\text{length(esterna)} = \# \bullet$
$= y + 1 + x + x(a-1)$
$= 1 + y + a \cdot x$
mai $\equiv 0 \ (a)$. ■

Congettura: se d è primo ogni $(\tilde{\Sigma}, S, d, n; \pi_1, \dots \pi_n)$ è realizzabile.

Fatto: basta dimostrarlo per $n = 3$.

Teorema: ogni $(\tilde{\Sigma}, S, d, n; [d], \pi_2, \dots, \pi_n)$ è realizzabile.

Oss: se $\tilde{\Sigma} = S$ e $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ $\deg(p(z)) = d$
estendo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $p : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
$p(\infty) = \infty$

Esercizio: p riv. ramif. di grado d con
$p^{-1}(\infty) = \{\infty\} \to \pi_1 = [d]$.

Fatto: ogni $(S, S, d, n; [d], \pi_2, \dots, \pi_n)$ si realizza tramite un polinomio.

Dimo (per $\tilde{\Sigma} = S$) :

RH: $2-(1+l_2+\dots+l_n) = d(2-n)$

$\Rightarrow l_2+\dots+l_n = (n-2)d+1$.

$\boxed{n=3}$ per induzione su d. Caso base ...

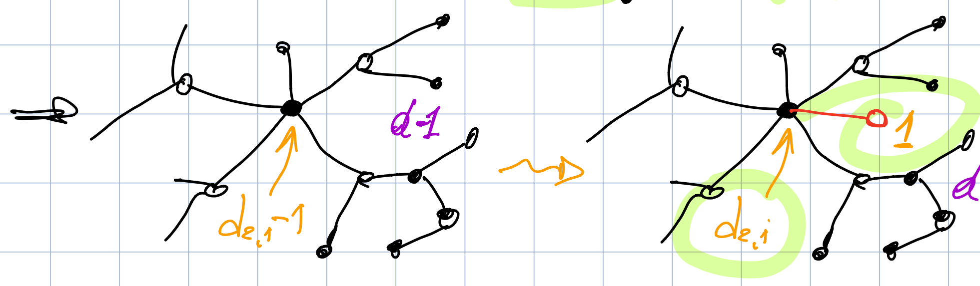
Passo induttivo: $l_2+l_3 = d+1 \Rightarrow \pi_2$ o π_3 contengono un 1

(altrimenti π_2, π_3 hanno entrate $\geq 2 \Rightarrow l_2, l_3 \leq d/2$ No)

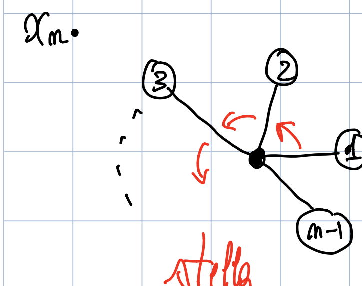
Wlog: $\pi_2 = [d_{2,1}, \dots]$ $\quad d_{2,1} > 1$

$\pi_3 = [1, d_{3,2}, \dots]$.

Realizzo $(S, S, d-1, 3; [d-1], [d_{2,1}-1, d_{2,2}, \dots], [d_{3,2}, \dots])$

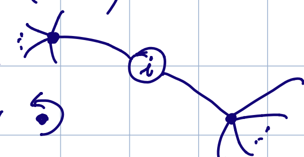


$\boxed{n \geq 4}$ uso costellazioni:



$f: S \to S$ $\quad f^{-1}$(stelle) = costellazione

- unione di stelle:



- etichette $1, \dots, n-1$
- valenze (i) sono π_i
- lungo ogni reg. complementare vedo $\ell_{3,j}$ volte (1) ... (n-1) $\quad j = 1 \dots l_3$

induzione su d (lascio cadere ipotesi $\pi_i \neq [1,\dots,1]$)

base = id. $d=1$.

p.i. se ho qualche $[1,\dots,1]$ ricado in $m-1$.

RH: $l_2+\dots+l_m = (m-2)\cdot d+1$.

Affermo che a meno di rindicamento $\pi_3,\dots,\pi_m$ contengono un 1:

altrimenti π_2, π_3 hanno entrambe $\geq 2 \Rightarrow l_2, l_3 \leq d/2$

$$\Rightarrow \underbrace{l_2+\dots+l_m}_{(m-2)d+1} \leq d/2+d/2+(m-3)\cdot d = (m-2)\cdot d$$

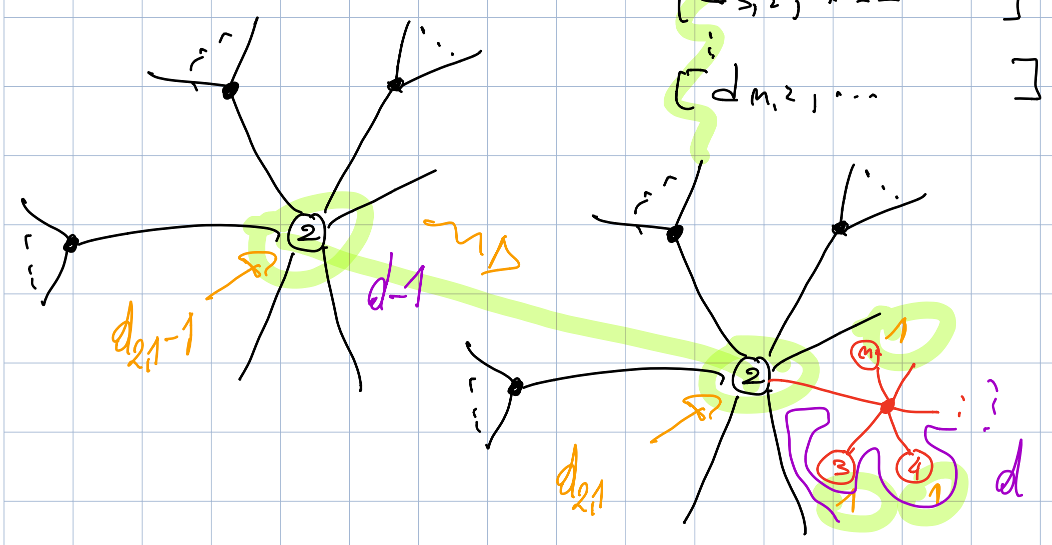
assurdo.

Wlog

$$\pi_2 = [d_{2,1}>1, d_{2,2},\dots]$$
$$\pi_3 = [1, d_{3,2},\dots]$$
$$\vdots$$
$$\pi_m = [1, d_{m,2},\dots]$$

Induttivamente realizzo

$$\begin{array}{l} \quad d-1 \\ [d_{2,1}-1, d_{2,2},\dots] \\ [d_{3,2},\dots] \\ \vdots \\ [d_{m,2},\dots] \end{array}$$



$\blacksquare$

<u>Nodi DIFF</u> : $\alpha : S^1 \to S^3$ iniettive DIFF $\alpha'(z) \neq 0 \ \forall z$

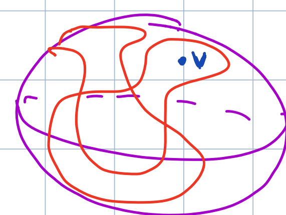
$\alpha_0 \sim \alpha_1$ se $\exists \, \alpha_t$

<u>link</u>: unione disgiunta di nodi

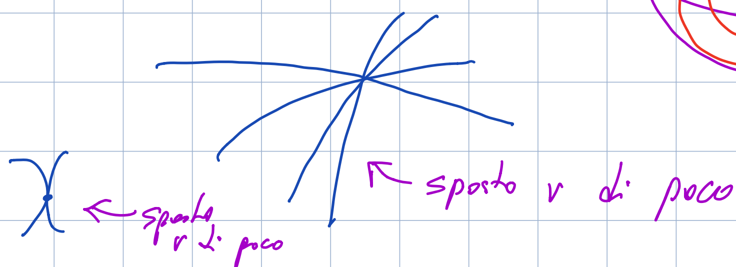
<u>Fatto</u>: supponendo $\infty \notin Im(\alpha)$ e per un generico $v \in \mathbb{R}^3$

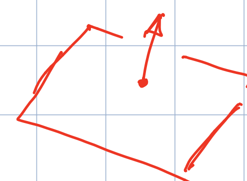
$\pi_{v^\perp} \circ \alpha$ ha derivata prima $\neq 0$ e solo pti doppi trasversali.

$\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} : S^1 \to S^2$ diff

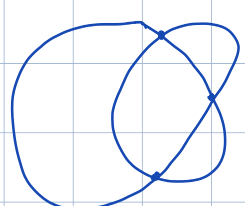


$v \notin Im\left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}\right)$





Trasformo $Im(\pi_{v^\perp} \circ \alpha) \subset \mathbb{R}^2 = v^\perp$ in un diagramma:



proiez.

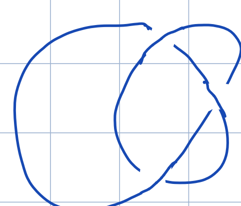


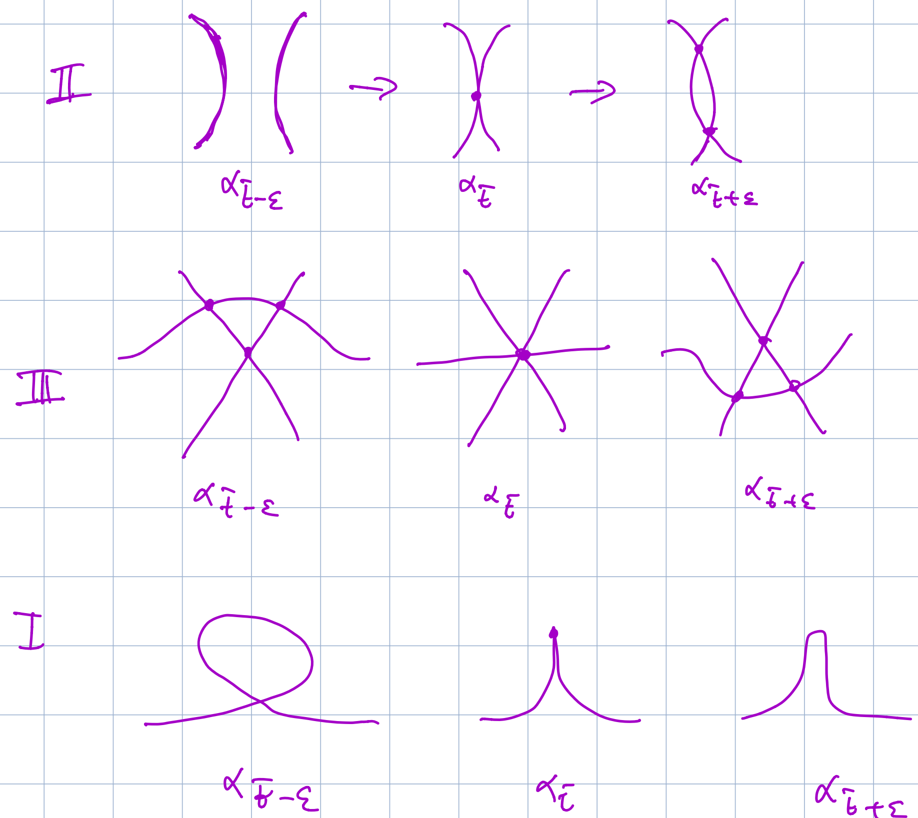
diagramma.

nodo/link ⇝ diagramma

Quali diagrammi rappresentano nodi/link isotopi?

Dato modo Per v generico ho dei +o e solo pti doppi trasversali.

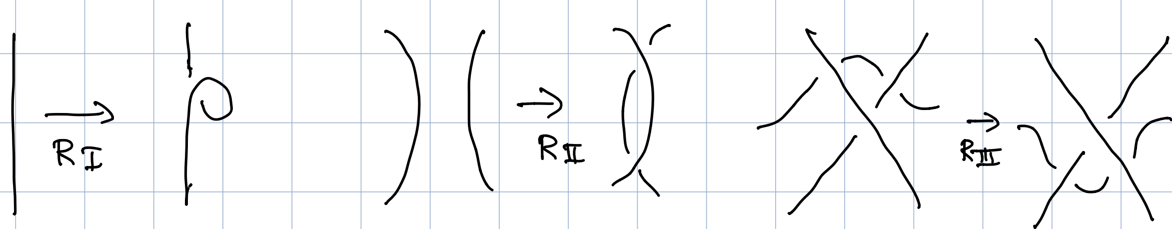
Se invece ho $(\alpha_t)_{t\in[0,1]}$ per v generico ottengo le condizioni di sopra per quasi ogni t tranne:



Teo: $\exists$ bigezione

$$\{\text{link in } S^3\}/\text{isotopia} \longrightarrow \frac{\{\text{diagrammi planari}\}}{R_I^{\pm 1} / R_{II}^{\pm 1} / R_{III}^{\pm 1}}$$

mosse di Reidemeister:



Ingredienti: suriettiva : posso scegliere v come sopra

ben definita : • isotopia si traduce in mosse per v ben scelto

• indip. da v : invece che muovere v, tengo lui fisso e muovo il link ⇝ isotopie

iniettiva: mosse sui diagrammi generano isotopia. ▨

Oss: a priori si può pensare che ci siano 3 tipi di R_{III}