



Quesito 1. Dato V spazio vettoriale reale di dimensione 3 e $f : V \rightarrow V$ lineare, determinare gli autovalori di f sapendo che $\text{tr}(f) = 4$, $\det(f) = -30$ e $p_f(1) = 16$.
(Ricordare che $p_f(t)$ è un polinomio monico.)



Quesito 2. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice

$$\begin{pmatrix} a^2 - a - 10 & 2a^2 - a - 15 \\ 9 - a^2 & 2(7 - a^2) \end{pmatrix}.$$



Quesito 3. In \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare canonico calcolare la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sul piano

$$\text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$



Quesito 4. Sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$ considerare il prodotto scalare

$$\langle p(t)|q(t)\rangle = \int_0^1 p(u) \cdot q(u) \, du.$$

Determinare tutti i vettori di V ortogonali a $3 - 2t$ rispetto a tale prodotto scalare, nonché unitari rispetto alla norma ad esso associata.



Quesito 5. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di \mathbb{R}^2 che la diagonalizza.



Quesito 6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$(3t - 2)x^2 + 2txy + (t - 1)y^2 + 2x = \frac{1}{2}$$

è degenerare, e negli altri casi descriverne il tipo affine.



Quesito 7. Descrivere l'azione isometrica su \mathbb{R}^3 di una matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\det(A) = 1$ e $\operatorname{tr}(A) = 1 + \sqrt{2}$.



Quesito 8. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$xz - xy + x + yz + y^2 - y + 1 = 0.$$



Quesito 9. Data la curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^2 + t \end{pmatrix}$ calcolare

$$\int_{\alpha} (x - y).$$



Quesito 10. Calcolare

$$\int_{\alpha} xy(y \, dx + x \, dy)$$

dove $\alpha : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \\ \ln(2-t) \end{pmatrix}$.



Risposte ai quesiti

1. $-3, 2, 5$

2. $t \neq -2$

3. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $\pm \frac{5-12t}{\sqrt{13}}$

5. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3\sqrt{2}, v_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. Degenera per $t = 0$ e $t = \frac{3}{2}$; parabola per $t = \frac{1}{2}$ e $t = 2$; ellisse per $0 < t < \frac{1}{2}$ e $t > 2$; iperbole per $\frac{1}{2} < t < 2$ con $t \neq \frac{3}{2}$; vuota per $t < 0$

7. Rotazione di $\frac{\pi}{4}$ intorno a una retta

8. Iperboloide ellittico (a due falde)

9. $\frac{1}{6}\sqrt{2}(1 - 5\sqrt{5})$.

10. $-\frac{1}{2}\ln(3)^2$