



Quesito 1. Considerare

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 2x_1 + 5x_2 + 7x_4\}$$

e $f : V \rightarrow V$ lineare. Sapendo che il polinomio caratteristico di f si annulla in $t = -5\sqrt{3}$, $t = 2$ e $t = 4\sqrt{2}$, si può concludere che f è diagonalizzabile? Spiegare.



Quesito 2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 7-t^2 & t+3 & t-3 \\ 0 & t+1 & t-4 \\ 0 & 0 & t^2-11 \end{pmatrix}$.



Quesito 3. Trovare tutti i vettori di \mathbb{C}^2 ortogonali a $\begin{pmatrix} 3 - 2i \\ 4 + i \end{pmatrix}$ unitari e con prima componente immaginaria pura.



Quesito 4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & t^2 - 3t \\ 2 & t + 1 & -1 \\ 4t - 10 & -1 & t + 3 \end{pmatrix}$$

definisce un prodotto scalare su \mathbb{R}^3 .



Quesito 5. Provare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 + 2i \\ -1 + 2i & 3 \end{pmatrix}$ è normale.

Trovare gli autovalori di A e una base ortogonale di \mathbb{C}^2 che la diagonalizza.



Quesito 6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t : 2 : t^2 + 1]$ appartiene alla retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[-2 : 3 : 1]$ e $[4 : -1 : 13]$.



Quesito 7. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$2x^2 + 2(1-t)xy + (t+11)y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$$

è una parabola.



Quesito 8. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$-x^2 - 5y^2 + z^2 + 6xy + 4yz - 2x + 2y = 0.$$

Giustificare la risposta.



Quesito 9. Per la curva orientata $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 5t \\ 3t^2 + 8t \end{pmatrix}$ calcolare la curvatura nel punto $t = 1$ e il segno della curvatura per ogni t .



Quesito 10. Calcolare

$$\int_{\alpha} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

con $\alpha : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -t \end{pmatrix}$.



Risposte ai quesiti

1. Sì: V ha dimensione 3 e f ha tre autovalori distinti
2. $t \neq 2, \pm 3$
3. $\pm \frac{1}{\sqrt{510}} \begin{pmatrix} 17i \\ 11 - 10i \end{pmatrix}$
4. $t = 2$
5. $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$; $\lambda_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{5}$; $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ \pm i\sqrt{5} \end{pmatrix}$
6. $t = -1$ e $t = 5$
7. $t = 7$
8. Paraboloide iperbolico
9. $-\frac{3}{125}\sqrt{2}$; positiva su $(-\frac{5}{3}, -1)$, nulla agli estremi, negativa fuori
10. $-\pi$