UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/1/20 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ con $p_A(z) = (z-5i)^2 \cdot (z+1-2i)$ si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} t+6 & t^2-7 \\ t+5 & t^2-\frac{t}{2}-6 \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare?

4. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -i & 2-i \\ -2-i & 3i \end{pmatrix}$ e una base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

5. Determinare il tipo affine della conica di equazione $8x^2+3y^2-14xy+2x-8y=0$. Spiegare.

6. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[4:-1;1-2t]$ e $[t+2:2:t-7]$ contiene il punto $[7:5:-1]$?

7. Data $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2-t \\ t-2t^2 \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/1/20 — Esercizî

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 6\alpha^2 + 7\alpha - 29 & 10\alpha^2 + 14\alpha - 48 \\ -3\alpha^2 - 4\alpha + 15 & -5\alpha^2 - 8\alpha + 25 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M_\alpha) = -\alpha^3 + \alpha^2 + 5\alpha - 5$.

(B) (6 punti) Al variare di α determinare gli autovalori di M_α e la loro molteplicità algebrica.

(C) (4 punti) Stabilire per quali α la M_α sia diagonalizzabile

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(2s) + s^2 \\ s - \cos(s) \\ \sin(s) - \cos(2s) \end{pmatrix}$ e la sua restrizione β a $[0, \pi]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. Non si può concludere: $A = \begin{pmatrix} 5i & 0 & 0 \\ 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & 2i-1 \end{pmatrix}$ è diagonal(izzabil)e mentre $A = \begin{pmatrix} 5i & 1 & 0 \\ 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & 2i-1 \end{pmatrix}$ non lo è

2. $\lambda_1 = 7,\ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -5,\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. $t = -3$

4. $\lambda_1 = 4i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -5 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Iperbole; $d_2 < 0$, $d_3 \neq 0$

6. $t = -5$ e $t = \frac{7}{2}$

7. $-\frac{1}{3}$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Si può eseguire il calcolo diretto oppure sosituire la prima riga con sé stessa più due volte la seconda, raccogliere $1-\alpha$ dalla prima riga, sostituire la seconda colonna con sé stessa meno due volte la prima, trovando $(1-\alpha)(\alpha^2-5) = -\alpha^3+\alpha^2+5\alpha-5$

(B) Per $\alpha = 2$ autovalore -1 doppio; per $\alpha = -3$ autovalore 4 doppio; altrimenti autovalori $1-\alpha$ e α^2-5 semplici

(C) $\alpha \neq 2$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(s)$ è non negativa, e quando si annulla non si annulla la prima componente (la terza invece sì)

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{12}\sqrt{30}$, $\tau = -\frac{8}{15}$

(D) $-\pi^2(1+\pi)$