

33 es 4

Dire quali punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono i punti all'infinito dell'insieme

$$F = \left\{ \left(\frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}, -t \right) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}, t > 0 \right\}$$


è in $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
retta $\rightarrow$ punto

Rette in $\mathbb{R}^3$ che sono "asintotici":

per $t \rightarrow 0$ ha una asintotica del tipo

$$\left(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t} + t, -t \right)$$

$$\left(M, -M + \epsilon, -\epsilon \right)$$

con $M \gg 0$

ci si avvicina alla retta

$$\text{Span}((1, -1, 0))$$

Il punto all'infinito richiesto è
 $[1 : -1 : 0]$

Per $t \rightarrow +\infty$

$$(\epsilon, M - \epsilon, -M)$$

con $M \gg 0$

ci si avvicina alla retta,

$$\text{Span}((0, 1, -1))$$

che dal il punto

$$[0 : 1 : -1].$$

52 $\rightarrow 5$

$$\text{Dici } X = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
vettori colonna.

$$X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$$

Si sa che $\det X = -1$.

Calcolare.

$$\det(\underbrace{v_2 + 2iv_3}, v_1 - v_2 + v_3, 2v_1 - iv_2)$$

Si usano le proprietà del determinante.

$$= \underline{\det(v_2, v_1 - v_2 + v_3, 2v_1 - iv_2)}$$

$$+ \underline{\underline{\det(2iv_3, (v_1 - v_2) + v_3, 2v_1 - iv_2)}}$$

$$= \underline{\det(2v_1 - iv_2, v_2, v_1 - v_2 + v_3)}$$

$$+ \det(2iv_3, \underline{v_1 - v_2}, \underline{2v_1 - iv_2}) +$$

$$+ \underline{\underline{\det(2iv_3, \underline{v_3}, \underline{2v_1 - iv_2})}}$$

$\uparrow = 0$

$$\begin{aligned}
&= \det (2v_1, v_2, \underline{v_1 - v_2 + v_3}) \\
&\quad + \det (2iv_3, v_1 - v_2, \underline{2v_2 - iv_2}) \\
&= \det (2v_1, v_2, v_3) + \\
&\quad + \det (2iv_3, v_1, (2-i)v_2) \\
&= 2 \det (v_1, v_2, v_3) + \\
&\quad + \det (v_1, \underline{(2-i)v_2}, \underline{2iv_3}) \\
&= 2 \det X + \\
&\quad + (2-i)(2i) \det X
\end{aligned}$$

notice $\det X = -1$

$$= -2 + (4i + 2)(-1) =$$

$$= -2 - 4i - 2 = \underline{\underline{-4(1+i)}}$$

la risposta sul libro è $4(1-i)$

Facciamo un check

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det X = -1$$

Calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -i \\ -2i & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -i & 1 & -1 \\ -2i & -1 & 0 & -2i & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 2 - 4i = \underline{\underline{-4(1+i)}}$$

Il [51] es 5 è simile, risposta giusta.

58 es 4

Sia A matrice quadrata

$P_A(t)$ il pol. car.

Se A è 5×5 , che relazione c'è
fra $P_A\left(\frac{t}{2}\right)$ e $P_{2A}(t)$

Ricordiamo che

$$P_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_5)$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sono

numeri complessi, eventualmente con ripetizioni
(sono gli autovalori complessi di A).

$$P_{2A}(t) = ?$$

Cercare di capire chi sono gli autovalori di $2A$.

Se λ_1 è autovettore di A , vuol dire che esiste $v \in \mathbb{R}^5$ $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda_1 v$

Osservo che

$$(2A)(v) = (2\lambda_1)v$$

dunque v è autovettore anche per $2A$ con autovettore $2\lambda_1$.

● E VICEVERSA.....

In questo modo si verifica che gli autovalori di $2A$ sono esattamente

$$2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3, 2\lambda_4, 2\lambda_5$$

$$P_{2A}(t) = (t - 2\lambda_1)(t - 2\lambda_2) \dots (t - 2\lambda_5)$$

$$P_A\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\frac{t}{2} - \lambda_1\right)\left(\frac{t}{2} - \lambda_2\right) \dots \left(\frac{t}{2} - \lambda_5\right)$$

Nota allora che:

$$z^5 P_A\left(\frac{t}{z}\right) = P_{zA}(t)$$

48 es 6.

Determinare $D, X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
con D diagonale e X ortogonale tali che

$$X^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X = D$$

Il testo ci dice che

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } D \text{ sono}$$

coniugate

La D è diagonale e ha lo stesso pol.
caratteristico di $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = t^2 - 2t - 17$$

$$\Delta = 4 + 68 = 72$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1+3\sqrt{2} \\ 1-3\sqrt{2} \end{cases}$$

Le già che

$$D = \begin{pmatrix} 1+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Per la teoria si che

$$X = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

con $\sqrt{1}$ antenettore nel a $1+3 \sqrt{2}$

$$e \quad v_2 \quad = \quad = \quad = \quad 1-3 \sqrt{e}$$

$$A \rightarrow D$$

$$X^{-1} A X = D$$

ATTENZIONE
nel testo

|||
autovetori..

abbiamo la richiesta in più che

X sia ortogonale dunque
in realtà le sue colonne saranno

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} \quad | \quad \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

RIPASSO Paragrafo 10.2

MATRICE ORTOGONALE

$${}^t X = X^{-1}$$

MATRICE SIMMETRICA

$${}^t X = X$$

equivalente a dire che
le colonne sono una
base ortogonale di $\mathbb{R}^n$
(lo stesso per le righe)

MATRICE ANTISIMMETRICA

$${}^tX = -X$$

Trasforma v_1 e v_2

$$\text{Ker} \left((1+3\sqrt{2})I - A \right) =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-3 & -3 \\ -3 & 3+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

il rango è 1

$$(3\sqrt{2}-3)x - 3y = 0$$

$$y = \frac{3\sqrt{2}-3}{3} x$$

$$y = (\sqrt{2}-1)x$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v_1\|} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(calculate)

$$\text{Ker}((1-3\sqrt{2})I - A) \dots\dots)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le due colonne sono ortogonali. Dovranno esserlo per la teoria:
Riesz

$$A v_1 = \lambda v_1$$

$$A v_2 = \mu v_2 \quad \text{con } \lambda \neq \mu$$

$$\langle A v_1 | v_2 \rangle = \langle \lambda v_1 | v_2 \rangle = \lambda \langle v_1 | v_2 \rangle$$

||

$$\langle v_1 | {}^t A v_2 \rangle$$

||

$$\text{poiché } {}^t A = A$$

$$\langle v_1 | A v_2 \rangle$$

||

||

$$\langle v_1 | \mu v_2 \rangle$$

||

$$\mu \langle v_1 | v_2 \rangle$$

Dunque, poiché $\lambda \neq \mu$ deve valere

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$$

Ricordiamo l'enunciato completo del
teorema spettrale, forma complessa.

Teorema 10.2.7

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Allora A è normale se e solo se.
si diagonalizza tramite una matrice
unitaria

Ricordo la def:

A è normale se ${}^t \bar{A} A = A {}^t \bar{A}$

Il teorema dice che

A è normale se e solo se $\exists U$ unitaria

$$U^{-1} A U = D \text{ diagonale}$$

$$\uparrow \\ U^{-1} = {}^t \bar{U}$$

equivalente a dire che esiste una
base ortonormale di autovettori
che diagonalizza A

(infatti $U = (\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array})$)

$\uparrow$
autovettori di questa base

40 es 3 Per quali $z \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1+iz & z-i \\ z+i & z \end{pmatrix}$$

ammette base ortonormale di autovettori

Il teorema ci dice che questo è vero
se e solo se

$$\overline{A}^t A = A \overline{A}^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 - i\bar{z} & \bar{z} + i \\ \bar{z} - i & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + iz & z - i \\ z + i & z \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} 1 + iz & z - i \\ z + i & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i\bar{z} & \bar{z} + i \\ \bar{z} - i & \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(1 - i\bar{z})(1 + iz) + (\bar{z} + i)(z + i)}_{\dots}$$

...

$$\underbrace{(1 + iz)(1 - i\bar{z}) + (z - i)(\bar{z} - i)}_{\dots}$$



$$(\bar{z} + i)(z + i) \stackrel{?}{=} (z - i)(\bar{z} - i)$$

$$z\bar{z} + i\bar{z} + iz - 1 = z\bar{z} - i\bar{z} - iz - 1$$

$$i(z + \bar{z}) = -i(z + \bar{z})$$

allora deve essere

$$z + \bar{z} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{Re} z = 0}$$

Perciò $z = bi$
e i conti si semplificano,
fino a scoprire che $b = 0$.

32 es 1

In $\mathbb{R}^3$. Proiezione di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ su

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

Un vettore ortogonale a W

è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cerco allora

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

voglio che stia in W

Il resto viene

$$27 - 2 \cdot 141 = 0$$

$$2 = \frac{27}{141} = \frac{9}{47}$$

Allora il vettore richiesto è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{9}{47} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{47} \\ \frac{51}{47} \\ \frac{-130}{47} \end{pmatrix} = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} 2 \\ 51 \\ -130 \end{pmatrix}$$