

Geometria 27/5/20

$A \in M_{n \times n}(K)$        $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$   
diagonalizzabile? cioè:  $\exists M \in M_{n \times n}(K)$  invertibile  
t.c.  $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ?

•  $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A) = t^n - \text{tr}(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \det(A)$

Per fare i  $\lambda_j$  devono essere radici di  $p_A(t)$ .

1. Se  $K = \mathbb{R}$  e  $p_A(t)$  ha qualche radice non reale  
[meno di  $n$  radici totali con coeff. in  $\mathbb{R}$ ]  
 $\Rightarrow$  risposta: No

ES:  $n=3$        $p_A(t) = (t-7)(t^2+t+5)$   
 $\lambda_1 = 7$        $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} \notin \mathbb{R}$

2. Se  $K = \mathbb{R}$  e  $p_A(t)$  ha tutte rad. reali, oppure  $K = \mathbb{C}$

2.A  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tutti distinti: SI

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$$

$$\lambda_j \text{ radice di } p_A(t) \iff p_A(\lambda_j) = 0$$

$$\iff \det(\lambda_j I_n - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\lambda_j \cdot I_n - A) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \exists v_j \neq 0 \text{ t.c. } (\lambda_j I_n - A) \cdot v_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists v_j \neq 0 \text{ t.c. } A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$$

Nel caso di  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distinti prendendo  $v_1, \dots, v_n$  autovettori relativi ( $A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$ ) si ha che  $v_1, \dots, v_n$  base [da dimostrare]

$$\Rightarrow \text{posto } P = (v_1 \dots v_n) \text{ ho } \underbrace{P^{-1} \cdot A \cdot P}_{[A]_B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$B = (v_1, \dots, v_n)$

2.B. Non tutte distinte  $p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_p)^{m_p}$   
( $p \leq n$ , qualche  $m_j \geq 1$ ).

$m_j = \text{mult. alg. di } \lambda_j$

$$\begin{aligned} \text{Def. mult. geom.}(\lambda_j) &= \dim(\text{Ker}(\lambda_j \cdot I_n - A)) \\ &= \dim(\text{Ker}(A - \lambda_j \cdot I_n)) \\ &= \dim\{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v = \lambda_j \cdot v\} \\ &\quad \text{autospazio rel. a } \lambda_j \end{aligned}$$

Es:  $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  diagonale  $p_A(t) = (t - 1)^2$   $m.a. = 2$

$$\text{Ker}(\lambda \cdot I - A) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m.g. = 2$$

$$\bullet) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad p_A(t) = (t - \lambda)^2 \quad \text{m.a.} = 2$$

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\text{m.g.} = 1$$

A non diagon.

$$\text{se } M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

$$\text{anzi } A = M \cdot \lambda \cdot I \cdot M^{-1} = \lambda \cdot M \cdot M^{-1} = \lambda \cdot I \quad \underline{\text{no}}$$

Yu dim. puzsari:

$$\bullet A = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \right\} m$$

$p_B(t)$  non ha rad.  $\lambda$

$$p_A(t) = (t - \lambda)^m \cdot p_B(t)$$

$$\text{m.a.}(\lambda) = m$$

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & B - \lambda I_{m-m} \end{array} \right) \Rightarrow \text{m.g.}(\lambda) = m - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B - \lambda I \end{pmatrix}$$

$$= m - (m - m) = m$$

$$\Rightarrow \text{m.g.}(\lambda) = m$$

$$\bullet A = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

$$p_A(t) = (t - \lambda)^m \cdot p_B(t)$$

$$\text{m.a.}(\lambda) = m$$

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{matrix} & * \\ \hline 0 & B - I \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \text{m.p.}(A) = n - \text{rank} \left( \begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{smallmatrix} & A-I \end{array} \right) \\ = n - (q + n - n) = \boxed{n - q}$$

Operativamente se le radici di  $P_A(t)$  non sono  $n$  distinte

- di quelle con m.a. = 1 non ci preoccupo (m.g. = 1)
- In quelle  $\lambda_j$  con m.a. > 1 calcolo

$$\text{m.p.}(\lambda_j) = \dim \ker(A - \lambda_j I_n) \\ = n - \text{rank}(A - \lambda_j I_n);$$

se viene fuori m.p.  $(\lambda_j) = \text{m.a.}(\lambda_j)$  OK Su  
 altrimenti, se qualche m.g.  $(\lambda_j) < \text{m.a.}(\lambda_j)$  No

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

Es:  $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$f: V \rightarrow V$  data da  $f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Prova che  $f$  è diagonalizzabile e calcola le sue  
 componenti.



$$B = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = [f]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_f(t) = p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} t+1 & 9 \\ 6 & t+4 \end{pmatrix} = t^2 + 5t - 50 \\ &= (t+10)(t-5) \\ \lambda_1 &= -10 \quad \lambda_2 = 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  e  $A$  sono diagonalizzabili.

Base per  $A$ :

$$v_1: A \cdot v_1 = -10 v_1 \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - 9y = -10x \\ -6x - 4y = -10y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 9y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} \quad \text{ATTESO}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: A \cdot v_2 = 5 v_2 \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - 9y = 5x \\ -6x - 4y = 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 9y = 0 \\ -6x - 9y = 0 \end{cases} \quad \text{ATTESO}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Base per  $f$ : ricorda che  $f \mapsto A$  e che  $B = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$w_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = 9 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verifco: } f(W_1) = 1 \cdot f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 1 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -10W_1 \quad \underline{\underline{OK}}$$

$$f(W_2) = 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -45 \\ 30 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = 5W_2 \quad \underline{\underline{OK}}$$

Q: discutere le forme canoniche di una matrice antisimmetr.

Una matrice antisimmetrica è una  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  t.c.  
 ${}^t A = -A$ .

So che gli autval di  $A$  sono immaginari puri (poiché  $A$  è anche antihermitiana) dunque l'unico autval. reale può essere 0.

Pertanto  $A$  può essere diagonalizzabile solo se  $A=0$ .

Tuttavia per  $A \neq 0$  esiste una base ortogonale di  $\mathbb{R}^n$  rispetto a cui  $A$  è diag. a blocchi

$1 \times 1 = (0)$  e  $2 \times 2 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ , cioè esiste  
 $M$  matr. ortog. ( ${}^t M = M^{-1}$ ) t.c.

$${}^t M \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

Nota che  $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$   
 ha pol. car  
 $t^2 + k^2$  dunque  
 radici  $\pm ik$ .

$\Rightarrow$  in  $k$  dei blocchi sono le  
 parti immaginarie degli autval.

Ad es. per  $n=3$  ho ottenuto un blocco  $1 \times 1$

$\Rightarrow A$  ha forma canonica  $\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -7 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -7 & -5 \\ 7 & t & 3 \\ 5 & -3 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 - 7 \cdot 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 7 \cdot (-3) + 25t + 49t + 9t$$

$$= t(t^2 + 73)$$

$\Rightarrow \exists$  base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  t.c.

$$M \cdot A \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{73} & 0 \\ \sqrt{73} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{73} & 0 \\ -\sqrt{73} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

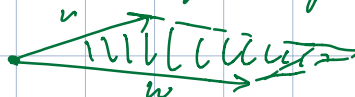
Q: cos'è il prodotto vettoriale.

A: il prod. vett. si esprime tra due vettori di  $\mathbb{R}^3$  così:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yc - za \\ -(xc - za) \\ xb - ya \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & a & \hat{z} \\ y & b & \hat{y} \\ z & c & \hat{x} \end{pmatrix}$$

Proprietà di RAW:

1. Nullo se  $v, w$  sono lin. dip.
2. Altrimenti genera la retta  $\perp$  al piano  $\text{Span}(v, w)$
3. Ha lunghezza = area



4. E' risolta in modo che

$$\begin{array}{ccc} V & W & V \wedge W \\ \text{pollice} & \text{indice} & \text{medio} \end{array}$$
mano destra

Q. Cos'è un prodotto scalare.

Un prodotto scalare è  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Fisso  $V$  sp. rett. su  $\mathbb{R}$

(funzione con due argomenti vettoriali e valore numerico)  
che soddisfa:

1. bilineare (lineare in ciascun argomento fisso l'altro):

sinistra:  $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w) \quad \forall \dots$

destra:  $f(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 f(v, w_1) + \lambda_2 f(v, w_2) \quad \forall \dots$

2. simmetrico:  $f(v, w) = f(w, v) \quad \forall \dots$

3. def. pos:  $f(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0$

Determinano l'intersezione

$$L_1 = \{ [t : t-8 : 4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \}$$

$$L_2 = \{ [2-t : 3 : t-5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R} \}$$

Ricordo che  $[x_1 : \dots : x_n] = [y_1 : \dots : y_n]$

se  $\exists k (\neq 0)$  t.  $y = k \cdot x$  cioè  $y_j = k \cdot x_j \quad j=1, \dots, n$   
( $x, y$  lin. dip.)

Quindi caso per pochi  $t$  i rett.  $\begin{pmatrix} t \\ t-8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-t \\ 3 \\ t-5 \end{pmatrix}$   
sono lin. dip.  
~~NO~~

$$L_1 = \{ [1 : t-8 : 4] : t \in \mathbb{R} \}$$

$$L_2 = \{ [2-t : 3 : t-5] : t \in \mathbb{R} \}$$

Quindi caso per pochi  $t, t \in \mathbb{R}$  i rett.  $\begin{pmatrix} t \\ t-8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-t \\ 3 \\ t-5 \end{pmatrix}$   
sono lin. dip.

Lo sono  $\Leftrightarrow$  i 3 det  $2 \times 2$  ottenuti cancellando  
una riga da  $\begin{pmatrix} t & 2-t \\ t-8 & 3 \\ 4 & t-5 \end{pmatrix}$  sono 0.

Comincio da  $(t-8)(t-5) = 12$

$$t(t-5) = 8t - 28$$

$$t = 4 \cdot \frac{2t-7}{t-5}$$

Ora considero  $t(t-5) = 4 \cdot (2-t)$  e sostituisco

$$\cancel{4} \cdot \frac{2t-7}{\cancel{t-5}} \cdot (\cancel{t-5}) = \cancel{4} (2-t)$$

$$3t = 9 \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \cdot \frac{6-7}{3-5} = 2$$

Verifico due valori:

$$t = 2 \quad [2 : -6 : 4]$$

$$t = 3 \quad [-1 : 3 : -2] \quad \text{Sì, lo stesso.}$$

Risposta: il punto  $[1 : -3 : 2]$ .

Q: cos'è una quadrica non degenera?

A: Una quadrica è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  def. da una equazione polinomiale di grado 2 nelle coordinate, cioè:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z \\ & + a_{44} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

È detta non-deg. se  $\det(A) \neq 0$ .

Att: se prendo  $B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  qualsiasi (non simm)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

È sempre una quadrica ma non è  $\det(B)$   
che dice se è non sp. (non è  $B$   
che bisogna usare per passare a diagonale);  
quella da usare è  $A = \frac{1}{2}(B + {}^t B)$ , infatti

$${}^t u \cdot B \cdot u = 0 \quad *$$

$$\Leftrightarrow {}^t(u \cdot B \cdot u) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t u \cdot {}^t B \cdot u = 0 \quad *$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}({}^t u \cdot B \cdot u + {}^t u \cdot {}^t B \cdot u) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t u \cdot \frac{1}{2}(B + {}^t B) \cdot u = 0$$

————— 0 —————

Quadriche degeneri ——— non le chiedo

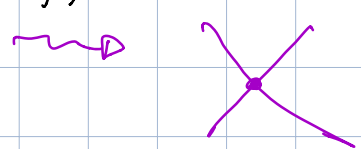
Coni di degeneri: potrebbe copiare equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

usando con gli  $a_{ij}$  che dipendono da  $m$  e  $t$   
in cui  $\det(A) = 0$  per qualche  $t$ .

Se per tali valori l'equazione si assume l'identità o...

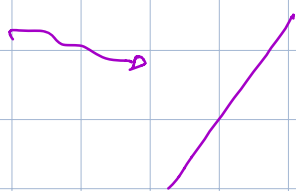
$$\dots (\alpha x + \beta y + \gamma) \cdot (\delta x + \varepsilon y + \zeta) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix} \neq 0$$



$$\dots (\alpha x + \beta y + \gamma) (\alpha x + \beta y + \gamma) = 0 \quad \sigma \neq 0$$



$$\dots (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0$$



---


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$\begin{aligned} \langle v_1 | v_2 \rangle &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{3} = 0 \\ \langle v_1 | v_3 \rangle &= 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-\sqrt{2}) - 1 \cdot \sqrt{2} = 0 \\ \langle v_2 | v_3 \rangle &= 0 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2}) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 0 \\ \|v_1\|^2 &= 4 + 1 + 1 = 6 \\ \|v_2\|^2 &= 0 + 3 + 3 = 6 \\ \|v_3\|^2 &= 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{è ortogonale}}}$$



Ha forma canonica (cioè  $\exists M$  ortog. t.c.  
 $M^T A \cdot M = \pm M \cdot A \cdot M \hat{=} \dots$ ) :

diag. e blocchi con blocchi:

$$1 \times 1 = (\pm 1)$$

$$2 \times 2 \approx \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}$$

$\det = +1$

$$\begin{pmatrix} \oplus & & \\ & \oplus & \\ & & \oplus \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c & -s \\ s & c \end{matrix}} & \\ & \oplus \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot (2\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 2\sqrt{6}) = +1$$

OSS: sempre anche dalla forma a blocchi.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Per noi: 
$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Perché cambiando non cambia la traccia ha

$$\text{tr}(A) = 2c + 1 \Rightarrow \text{però rimane c.}$$

$$\sin \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow C = \arccos \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} - 1 \right) \right) = 0$$

A é um auto. de  $\mathbf{A}$  e  $\theta$  interno e reflexo.