$\boxed{1}$ es 7

Calcolare $\displaystyle\int_\alpha 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$

$$\alpha(t) = \left(\cos\frac{\pi}{4}\,t^2,\ \cos\frac{\pi}{6}\,t^2\right) \quad \text{per } t \in [0,1]$$

Noto che esiste potenziale

$U(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^3y$$

$$U(x,y) = x^3y^2$$

Quindi come visto ieri

$$\int_{\alpha} w = U(\alpha(1)) - U(\alpha(0)) =$$

Calcolo

$$\alpha(1) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha(0) = (\cos 0, \cos 0) = (1, 1)$$

$$\int_{\alpha} w = U\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - U((1,1)) =$$

$$U = x^3 y^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 2\sqrt{2}} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{16} - 1$$

$\square$

$\boxed{7}$ es 7

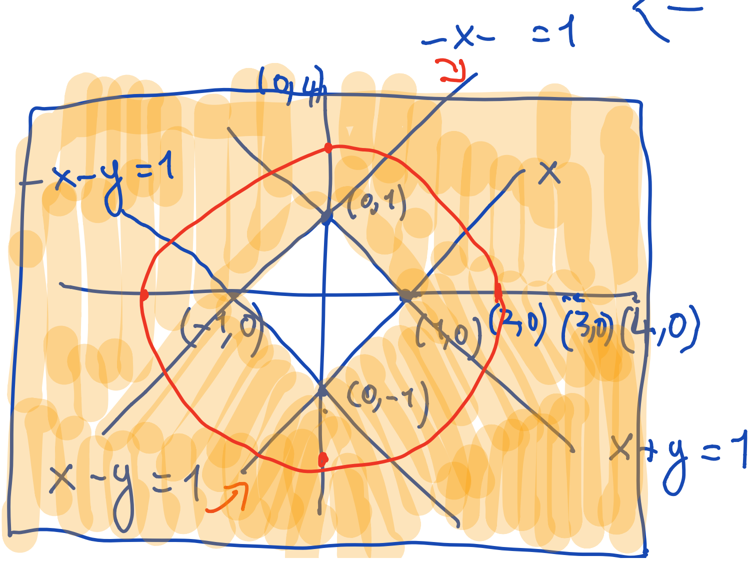
Stabilire se esistono forme chiuse non esatte in

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 4 \text{ e } |x|+|y| \ge 1 \right\}$$

Come ricordato ieri, se Ω è semplicemente connesso allora

forma chiusa $\Leftrightarrow$ forma esatta

$\Leftarrow$ sempre vera



Ω non è semplicemente connesso

Ci sono forme chiuse non esatte.

Un esempio lo possiamo adattare

da Esempio 15.2.8 del libro.

Prendo $\omega_0 = \dfrac{x}{x^2+y^2}\, dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}\, dx$

in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Vale che se $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\alpha \omega_0 = 2\pi$$

Nel nostro caso mantengo la stessa ω_0 ma

prendo una circonferenza di raggio 2

$\alpha : [0, 2\pi] \to \Omega$

$$\vartheta \to (2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta)$$

Devo calcolare

$$\int_\alpha \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Ricordo come è l'integrale di una forma su una curva.

$$\omega = f\,dx + g\,dy$$

$$\alpha(t) = (X(t), Y(t)) \qquad t \in [a,b]$$

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b f(\alpha(t))\,X'(t) + g(\alpha(t))\,Y'(t)\,dt$$

(Def 15.1.1)

Nel nostro caso

$$\int_0^{2\pi} \frac{(-2\sin\vartheta)(-2\sin\vartheta)}{(2\sin\vartheta)^2+(2\cos\vartheta)^2} + \frac{4\cos^2\vartheta}{(2\sin\vartheta)^2+(2\cos\vartheta)^2}\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\vartheta}{4} + \frac{4\cos^2\vartheta}{4}\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,d\vartheta = 2\pi$$

La forma non è esatta altrimenti avrei avuto

$$\int_\alpha \omega_0 = 0$$

Come visto anche nel libro, la forma ω_0 è chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\boxed{20}$ es 6

Determinare le parabole il cui punto all'infinito è anche punto all'infinito dell'iperbole di equazione $x^2-y^2=1$

Intanto guardo chi sono i punti all'infinito dell'iperbole

$$\mathcal{L} : \quad x^2-y^2=1 \qquad \text{è in } \mathbb{R}^2$$

$$\overline{\mathcal{L}} : \quad x^2-y^2=z^2 \qquad \text{è in } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}_\infty : \quad x^2-y^2=0 \qquad \text{è in } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

ma la parte all'infinito si identifica con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Allora i punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

sono

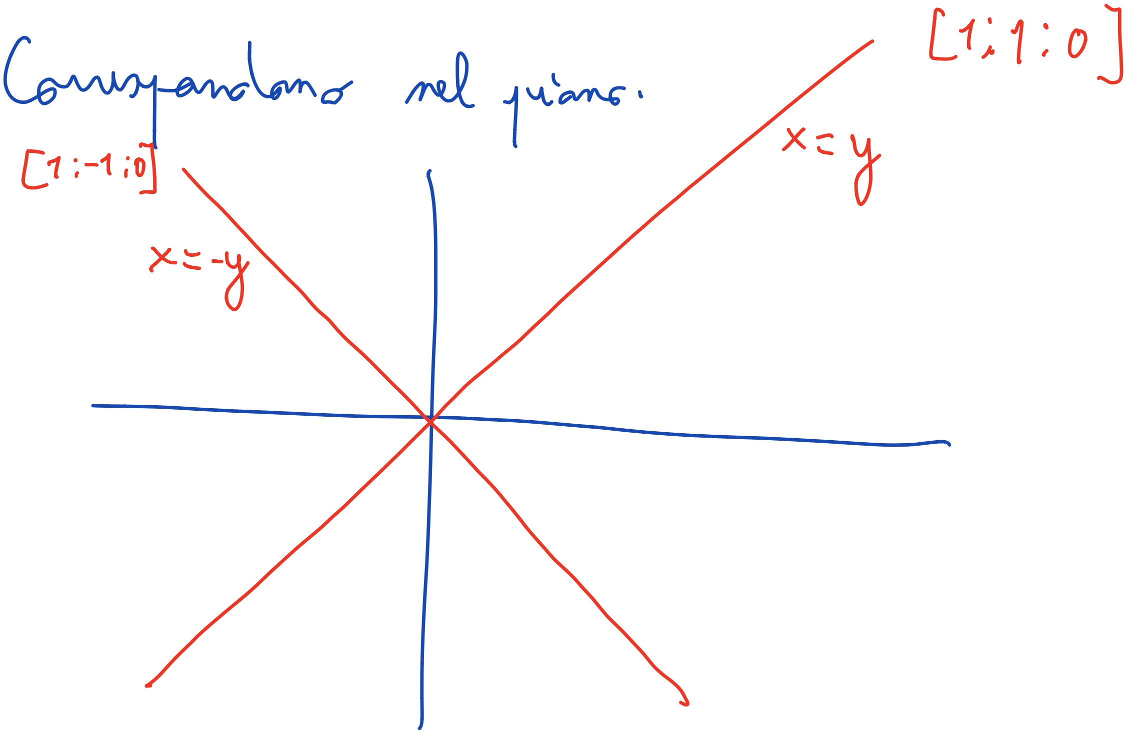
$$x^2=y^2$$

se identifico con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ posso scrivere $[1:1]$

$$[1:1:0] = [5:5:0]$$

$$[1:-1:0] = [-17:17:0]$$

Corrispondono nel piano.



Ricordo che il punto all'infinito di una parabola è il punto determinato dal suo asse.

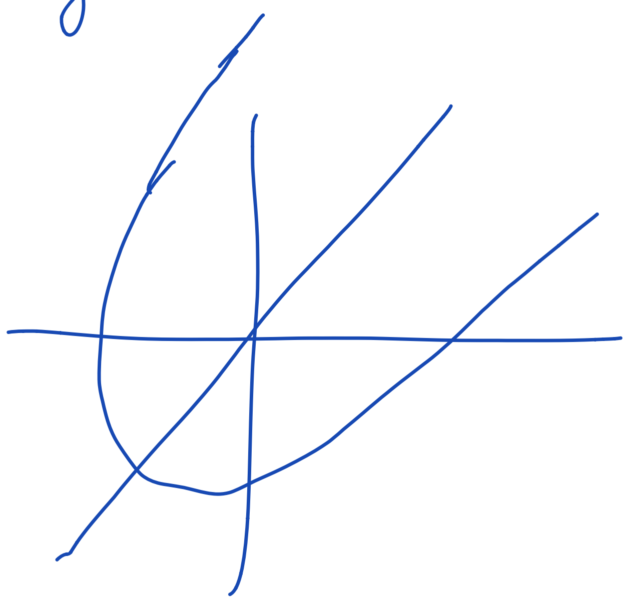
Le parabole che ci interessano dunque sono quelle il cui asse è

$$x = y$$

oppure

$$x = -y$$

per es..



Tali parabole si scrivono così:

$$(x+y) = a(x-y)^2 + b(x-y) + c$$

con $a \neq 0$

oppure

$$(x-y) = a\,(x+y)^2 + b\,(x+y) + c$$

con $a \neq 0$

Infatti: le parabole con asse $x=0$

sono

$$y = ax^2 + bx + c$$

e quelle con asse $y=0$

sono

$$\cancel{x} = ay^2 + by + c$$

e abbiamo fatto l'opportuno cambio di variabile.

$\boxed{13}$ es 4

$$\left\{ \underset{t \in \mathbb{R}}{[1+t : 2-t : t-6]} \right\} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

intersecarlo con i punti all'infinito della quadrica

$$\mathcal{L} : \quad x^2 + xy - 4yz + 7y = 5$$

è in $\mathbb{R}^3$

$$\overline{\mathcal{L}} : \quad x^2 + xy - 4yz - 7yu = 5u^2$$

è in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}_\infty : \quad x^2 + xy - 4yz = 0 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{pongo} \\ u=0\end{array}\right)$$

è in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ma la parte all'infinito si identifica con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Per trovare l'intersezione. $\left(\mathcal{L}_\infty \text{ è in } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\right)$

$x = 1+t$

$y = 2-t$

$z = t-6$

$$(1+t)^2 + (1+t)(2-t) - 4(2-t)(t-6) = 0$$

$$4t^2 - 29t + 51 = 0$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} \frac{17}{4} \\ 3 \end{cases}$$

i punti di intersezione sono

$$[1+t : 2-t : t-6]$$

$$P_1 = \left[1+\frac{17}{4} : 2-\frac{17}{4} : \frac{17}{4}-6\right] = [21 : -9 : -7]$$

$$P_2 = [4 : -1 : -3]$$