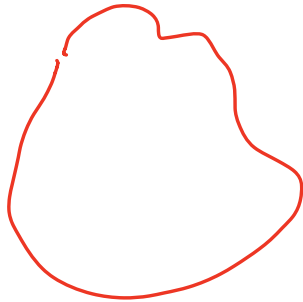


5 es 1

Calcolare $\int_2^{\text{forma}} y \sin(xyz) (y dx + 2x dy)$

dove $\alpha(t) = (t, \sin \frac{t}{2})$ per $t \in [0, \pi]$

forma $f(x,y) dx + g(x,y) dy$



Prop. 15.2.2.

Se $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathcal{U}$ aperto di $\mathbb{R}^2$
è una curva regolare ed considero

$U: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ con la derivata regolare:
allora $(x,y) \rightarrow U(x,y)$

$$\int_a^b \underline{dU} = U(a(b)) - U(a(a))$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Nel nostro caso

$$\int_a^b y^2 \sin(xy^2) dx + 2xy \sin(xy^2) dy$$

cerco $U(x, y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \underline{y^2 \sin(xy^2)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \sin(xy^2)$$

$U(x,y) = -\cos(\underbrace{xy^2})$ è il potenziale cercato
Def 15.2.3

Quindi la forma ω iniziale era
ESATTA

$$\omega = dU$$

Ricorda che $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \rightarrow (t, \sin \frac{t}{2})$$

$$\alpha(0) = (0, 0)$$

$$\alpha(\pi) = (\pi, 1)$$

$$\int dU \stackrel{\text{per Prop 15.2.2.}}{=} U(\alpha(\pi)) - U(\alpha(0))$$

α

$$= U((\pi, 1)) - U((0, 0)) =$$

ricordo $U(x, y) = -\cos(xy^2)$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

[5] es. 2.

Calcolare $\int_2^x$

con $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = (t, 2t^2)$$

Ricorda la def 14.1.9.

Dato $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$ regolare.

chiamare

$$\int_{\alpha} f = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

hel notric case.

$$f(x,y) = x$$

$$\int_{\alpha} x = \int_0^1 \underbrace{f(\underbrace{(t, 2t^2)}_{\alpha(t)})}_{\|\alpha'(t)\|} \sqrt{1+16t^2} dt$$

$$\alpha'(t) = (1, 4t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+16t^2}$$

$$= \int_0^1 t \sqrt{1+16t^2} dt$$

Substitution $\underline{u = 1+16t^2}$

$$\frac{dv}{dt} = 32t$$

$$dt = \frac{dv}{32t}$$

$$= \int_1^{17} \frac{1}{32} \sqrt{v} \, dv$$

$$= \frac{1}{32} \int_1^{17} \sqrt{v} \, dv$$

$$= \frac{1}{32} \left[\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \right]_1^{17} =$$

$$= \frac{1}{48} \left[v^{\frac{3}{2}} \right]_1^{17} =$$

$$= \frac{1}{48} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

[5] es 3

Calcolare curvatura e torsione di

$$\alpha(t) = (2t^2, t^3, \sin t) \quad \text{in } t=0$$

Nel paragrafo 14.3 si studiano
curvatura e torsione.

Nel 14.3.1. ci sono le formule per
le curve non necessariamente in parametro

l'arco
Prop 14.3.9
CURVATURA

$$K(s) = \frac{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|}{\| \alpha'(s) \|^3}$$

TORSIONE

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \mid \alpha'''(s) \rangle}{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|^2}$$

Nel nostro caso.

$$\alpha(t) = (2t^2, t^3, \sin t)$$

$$\alpha'(t) = (4t, 3t^2, \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (4, 6t, -\sin t)$$

$$\alpha'''(t) = (0, 6, -\cos t)$$

Vanno calcolati in $t=0$

$$\alpha'(0) = (0, 0, 1) \leftarrow$$

$$\alpha''(0) = (4, 0, 0)$$

$$\alpha'''(0) = (0, 6, -1)$$

$$K(0) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{1^3} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{1^3} = 4 \quad \text{CURVATURA}$$

$$\tau(0) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{16} =$$

$$= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \text{TORSIONE}$$

RIPASSO:

	$\alpha(t)$	con in PAR. D'ARCO	$\alpha''(s) \neq 0 \quad \forall s$
VEETTORE	TANGENTE	$\vec{e}$	$\alpha'(s)$
"	NORMALE	$\vec{e}$	$\frac{\alpha''(s)}{\ \alpha''(s)\ }$
"	BINORMALE	$\vec{e}$	

$$b(s) = \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

per cui

$$\left(\alpha'(s), \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, b(s) \right) \text{ sono}$$

una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$
e vale

$$b'(s) = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TORSIONE}}}{\tau(s)} \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

ES 2 a pag 215

$$\alpha(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (1-t^4, \sin \pi t)$$

A) Provare che α è regolare

Ricorda che α è regolare. (Def 14.1.1)

se le componenti hanno derivata continua
e $\alpha'(t) \neq (0, 0) \quad \forall t$.

Nel nostro caso

$$\alpha'(t) = (-4t^3, \pi \cos \pi t)$$

è continua in entrambe le componenti

$$\text{e } \alpha'(t) \neq (0, 0) \quad \forall t$$

infatti la prima coordinata è $= 0$

se e solo se $t=0$, ma per $t=0$
 $\pi \cos 0 = \pi \neq 0$.

B) Trovare il più grande intervallo
 I_+ contenente $\frac{3}{2}$ tale che

$\alpha|_{I_+}$ sia semplice.

[lo stesso con I_- e $-\frac{3}{2}$]

Def 14.1.1

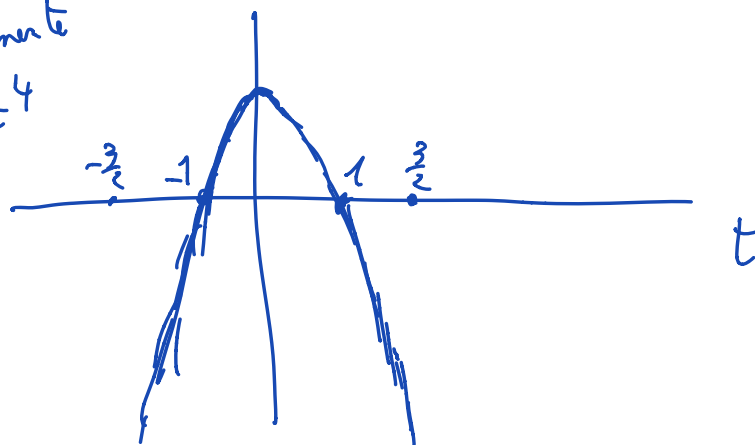
una curva è semplice se è unettima
 $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (1-t^4, \sin \pi t)$$

quali sono i $t_1 \neq t_2$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \quad ?$$

Prima
componente
 $1-t^4$



• $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ nella prima componente
se e solo se
 $t_1 = -t_2$

MI RESTRINGO QUINDI AL CASO IN CUI
le comp. $\sin \pi t$ $t_1 = -t_2$

$$z(t_1) = z(-t_1) \text{ nella sec componente}$$

se e solo se

$$\sin \pi t_1 = \sin -\pi t_1$$

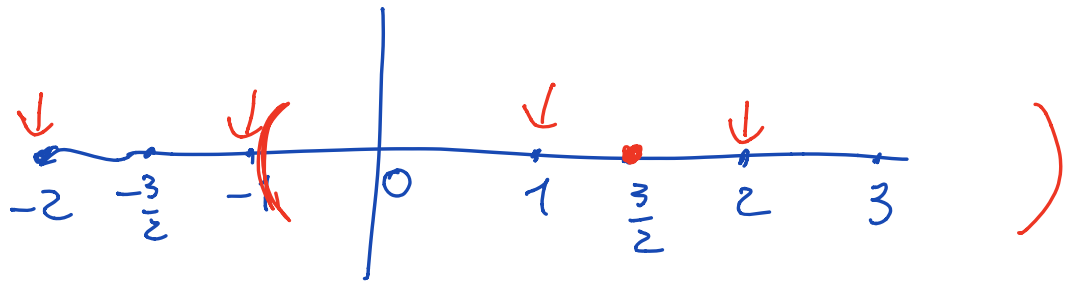
$$\sin \pi t_1 = -\sin \pi t_1$$

$$\text{se e solo se } t_1 = k \in \mathbb{Z}$$

Risultato

$\forall t$ intero vale.

$z(t) = z(-t)$ e queste
sono le uniche possibili contraddizioni
alla molteplicità di d .



Risposta

$$I_+ = (-1, +\infty)$$

Analoga risposta

$$I_- = (-\infty, 1)$$

$$\alpha(t) = (1 - t^4, \sin \pi t)$$

D) Calcolare la curvatura di α in $t = \frac{1}{2}$

α non è un parametro d'arco

RICORDO PROP 14.2.2,

Se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una regolare.
la curvatura di α in $\alpha(t)$ è

$$K(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonna}}}{\alpha'(t)} & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonna}}}{\alpha''(t)} \end{pmatrix}}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Nel nostro caso $t = \frac{1}{2}$

$$\alpha'(t) = (-4t^3, \pi \cos(\pi t))$$

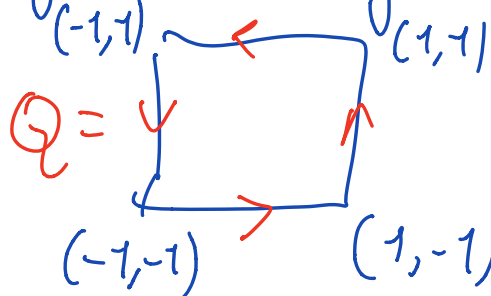
$$\alpha''(t) = (-12t^2, -\pi^2 \sin(\pi t))$$

$$K\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pi^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4 \pi^2$$

[29] es 7.

Calcolare l'integrale della forma

$\rightarrow \int_C 3x^2y^3 dx - x^3 dy$ sul
 Quadrato $Q =$


$$\int_Q w$$

dove w denota il bordo
 del quadrato Q
 che si denota ∂Q

Ricorda Teorema 15.3.5.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, chiuso di
un aperto, con bordo costituito da un numero
finito di curve regolari a tratti;
se w è 1-forma definita su un aperto
che contiene Ω allora vale.

$$\int_{\partial\Omega} w = \int_{\Omega} \boxed{dw}$$

Ricorda che se

$$w = f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

per definizione 15.3.1

$$\boxed{dw} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

Nel nostro caso.

$$w = 3x^2y^3dx - x^3dy$$

$$\int_{2Q} w = \int \underbrace{(-3x^2 - 9x^2y^2)}_{\text{}} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 -3x^2 - 9x^2y^2 dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[-x^3 - 3x^3y^2 \right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^1 -1 - 3y^2 - 1 - 3y^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^1 -2 - 6y^2 dy =$$

$$= \left[-2y - 2y^3 \right]_{-1}^1 =$$

$$= -2 - 2 - 2 - 2 = -8$$

[27] es 7

Problema $R = [-1, 1] \times [0, 2]$

$$\text{e } w = \left(5y^2 + e^{\cos^3 x} \right) dx + \left(\sin y^2 + x^3 y \right) dy$$

Calcolare $\int_{\partial R} w$

Ancora^{per} Teorema 15.3.5 so che

$$\int_{\partial R} w = \int_R dw$$

Calcolo

$$dw = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} dx + dy =$$

nel nostro caso

$$= (3x^2y - 10y) dx + dy$$

$$\int_R dw = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (3x^2y - 10y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[x^3 y - 10xy \right]_{-1}^1 dy =$$

$$= \int_0^2 y^3 - 10y + y^3 - 10y \, dy$$

$$= \int_0^2 -10y \, dy = \left[-5y^2 \right]_0^2 =$$

$$= -36.$$

26 es 7

Problema $W_k = (y^3 + \cos x) dx + (e^y - Kxy^2) dy$

Stipulare per quali $K \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\partial} w_K = 0 \quad \forall \text{ curva chiusa } \partial \text{ in } \mathbb{R}^2$$

semplicemente
connesso

Ricordo Corollario 15.2.5.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso.

Una 1-forma su Ω è esatta

se e solo se $\forall \alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

chiusa e regolare a tratti: vale

$$\int_{\alpha} w = 0$$

Dunque se w_K è esatta allora

valle la proprietà richiesta e viceversa

Ricordiamo anche che in generale

w forma esatta $\Rightarrow w$ forma chiusa

$$\text{cioè} \\ dW = 0$$

Ma per Teorema 15.3.8 vale che
 se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso,
 W forma chiusa $\Rightarrow W$ forma
 esatta

Nel nostro caso si lavora su $\mathbb{R}^2$ che
 è semplicemente connesso quindi verificare

W_K esatta
 equivale a verificare W_K chiusa

Dunque.

$$W_K = \underbrace{(y^3 + \cos x)}_f dx + \underbrace{(e^y - Kxy^2)}_g dy$$

Dobbiamo solo verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

perché $dw =$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Ora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -K y^2$$

Perché sono uguali se e solo se

$$K = -3$$