

17 5

Per quali $k \in \mathbb{R}$

$x^2 + k y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 4y + k = 0$
definisce un iperboida a due fogli?

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & k \end{array} \right)$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = k - 4$$

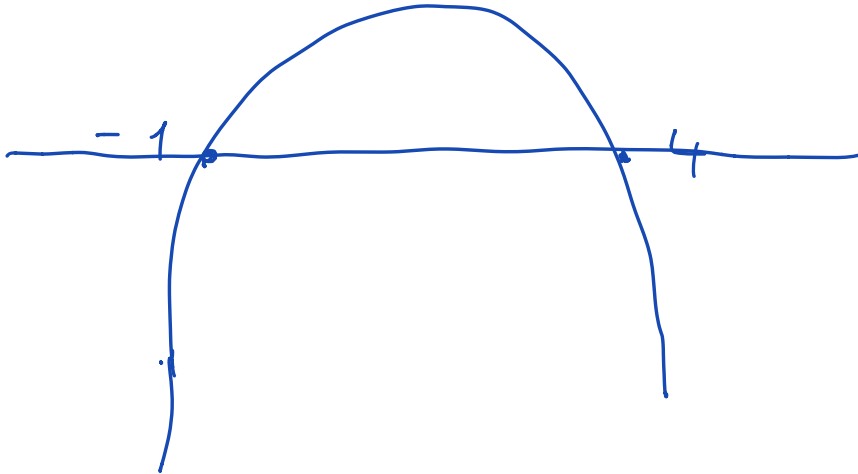
$$d_3 = -k + 3$$

$$d_4 = k(-k + 3) + 4 = -k^2 + 3k + 4$$

Osserva che $d_4 \neq 0$!

le radici di $-k^2 + 3k + 4$ sono

-1 e 4



dunque $d_4 > 0$ per $-1 < k < 4$

e $d_4 < 0$ per $k < -1$

o $k > 4$

d_1	+	+	+	+
d_2	-	-	-	+
d_3	+	+	-	-
d_4	-	+	+	-
segn' di Q	+ - -	+ - -	+ - +	+ + -
segn' di A	+ - - -	+ - - +	+ - + -	+ + - +

iperboloid
ellittico
(a due folde)

$d_4 = 0$
quadrica
degenera

iperboloid
ipربولico.

$d_2 = 0$
 $d_4 = 0$
iperboloid
quadrica
degenera.

$d_1 > 0$
 $d_2 < 0$
 $d_3 = 0, d_4 > 0$

iperboloid
ellittico
(a due folde)

segno di $Q = + - 0$
segno di $A = + - + -$
parabola iperbolica

RISPOSTA : iperbolica a due folle
per $K > 4$ e per $K < -1$

47 Una divisione in $\mathbb{R}[x]$ può
avere x^3 sia come quoziente sia come
resto?

RICORDIAMO LA DIVISIONE CON RESTO FRA POLINOMI:

$$\left[\begin{array}{l} \text{dividendo} = \text{quoziente} \cdot \text{divisore} + \text{resto} \\ \text{con } \text{grado}(\text{resto}) < \text{grado}(\text{divisore}) \end{array} \right]$$

LA RICHIESTA DELL'ESERCIZIO È

$$\text{dividendo} = x^3 \cdot \underset{\uparrow}{\text{divisore}} + x^3$$

ho a scegliere come dividere un polinomio
di grado ≥ 3

$$= x^3 \cdot (x^6 + 2x + 2) + x^3$$

$$x^9 + 2x^4 + 3x^3 = x^3 \cdot (x^6 + 2x + 2) + x^3$$

questa divisione ci dice che la risposta
al QUIZ è SÌ

noi potremmo scegliere
anche x^4

$$\S 2 \quad X = \{ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$$

e la sua base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Scrivere $3e_1 + 2e_2$ in base β .

Nota che

$$[3e_1 + 2e_2]_{\beta}$$

$$3e_1 + 2e_2 \in X$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soluzione è unica ed è

$$a = -1 \quad b = 2$$

Per questo

$$[3e_1 + 2e_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

§ 3 La matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ha 3 autovalori}$$

reali positivi?

Ricorda che $\det A = \text{prodotto degli autovalori}$.

ATTENZIONE QUI NON POTETE USARE
la regola del $d_1, d_2, d_3, \dots$ che si
adatta per le matrici SIMMETRICHE

Calcolo $\det A$ e scopri che $\det A = -8$

Allora deduci che non è possibile che
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ siano reali e positivi.

RISPOSTA: NO, perché $\det A = -8$.

Es 4 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare.

$$f(l_1 + l_2) = l_1 + 2l_2$$

$$f(l_1 - l_2) = 2l_1 + l_2$$

(NOTA
 $l_1 + l_2$ ed $l_1 - l_2$ sono basi di $\mathbb{R}^2$)

Quanto vale $f^{-1}(l_1)$?

1) Voglio scrivere

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{l_1, l_2}^{l_1, l_2}$$

2) Voglio invertirla: la prima colonna della matrice inversa sarà la risposta cercata.

$$\begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix}_{l_1, l_2} = \begin{pmatrix} f(l_1) & f(l_2) \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

INFATTI:
Noto che

$$\underbrace{f(l_1 + l_2) + f(l_1 - l_2)}_{\substack{\uparrow \\ = f(2l_1)}} = l_1 + 2l_2 + 2l_1 + l_2 = 3l_1 + 3l_2$$

$$= f(2l_1)$$

Da questo segue

$$2 f(l_1) = 3l_1 + 3l_2$$

$$f(l_1) = \frac{3}{2} l_1 + \frac{3}{2} l_2$$

Analogamente calcolando

$$f(l_1 + l_2) - f(l_1 - l_2)$$

$$\text{trova che } f(l_2) = -\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}$$

Ora noto che $\det [f]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = \frac{6}{4}$

Allora l'inversa è

$$\frac{1}{\frac{6}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = [f^{-1}]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2}$$

$\uparrow$
 $f^{-1}(e_1)$

RISPOSTA : $f^{-1}(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

Es 5 Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

Allora gli autovalori sono 2 e 3

$$V_2 = \text{Ker}(2I - A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_3 = \text{Ker}(3I - A) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi la base cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a meno di scalari $\neq 0$).

es 7 In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la retta per
 $[2 : 1 : -5]$ e $[3 : -2 : 7]$

contiene $[1:0:0]$?

Illustriamo cosa accade in $\mathbb{R}^3$

La domanda equivale a chiedersi se.

$$\text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

da il punto $\downarrow$ al quoziente
 $[1:0:0]$

al quoziente
da la retta
per $[2:1:-5]$
e $[3:-2:7]$

Ma la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ +1 & -2 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3

(ha $\det \neq 0$)

la risposta è

dunque
NO.

Potrebbe anche fare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e scoprire che è impossibile.