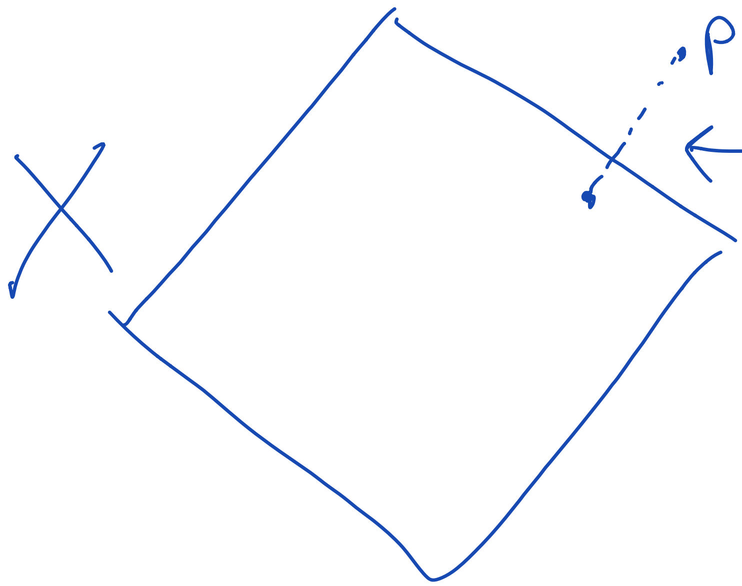
$\boxed{13}$ es. 1

Trovare il punto di $X = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \}$ di minima distanza da $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = P$



proiezione ortogonale di P su X.

Dobbiamo dunque trovare la proiezione ortogonale di P su X.

Osservo che $X^{\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

ricordo che X è definito da

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{standard}} = 0$$

Allora la proiezione di P ha la forma

$$P - \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3\lambda \\ 5+\lambda \\ 4-4\lambda \end{pmatrix}$$

dobbiamo trovare λ in modo che

$$\begin{pmatrix} -1-3\lambda \\ 5+\lambda \\ 4-4\lambda \end{pmatrix} \in X$$

$$3(-1-3\lambda)-(5+\lambda)+4(4-4\lambda)=0$$

$$-3-9\lambda-5-\lambda+16-16\lambda=0$$

$$8=26\lambda$$

$$\lambda=\frac{8}{26}$$

Allora la proiezione cercata è

$$\begin{pmatrix} -\frac{50}{26} \\ \frac{138}{26} \\ \frac{72}{26} \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -25 \\ 69 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ es. 7

Trovare $a>0$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ +1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ sia coniugata a

$$K = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria è che

$$p_A(t) = p_K(t)$$

$$= t(t^2+a^2)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ -1 & t & 2 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix} = t(t^2+9)$$

Perché siano uguali $a = \pm 3$

Poiché l'esercizio chiede $a \geq 0$,

resta solo $a = 3$.

È anche condizione sufficiente perché per teorema TEOREMA 10.2.11 parte prima sulla forma canonica delle matrici antisimmetriche so che posso trovare fra le coniugate di A una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la quale ha come pol caratteristico

$t(t^2+\gamma^2)$ che deve essere uguale a $p_A(t) = t(t^2+9)$.

Per questo so che

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è davvero una coniugata di A.

$\boxed{10}$ § 2.

Posto $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & t & 1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix}$

stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\langle \mid \rangle_A$$

è un prodotto scalare

(ossia è anche def positivo).

Svolgimento

A è simmetrica, resta solo da verificare che $\langle \, | \, \rangle_A$ sia def positivo.

Questo equivale (per il Teorema spettrale) a verificare che gli autovalori di A siano tutti e 3 maggiori di 0.

Cerchiamo solo I SEGNI degli autovalori e possiamo usare il teorema dei d_1, d_2, d_3.

$$d_1 = 6 > 0$$

$$d_2 = 6t - 1$$

$$d_3 = t\,\underbrace{(6t - 10)}$$

i segni degli moltiplicatori sono i segni

$$\frac{d_1}{1}, \quad \frac{d_2}{d_1}, \quad \frac{d_3}{d_2}$$

$$\Uparrow$$

$$>0$$

$$\Updownarrow$$

$$d_1 > 0$$

dunque cerco le t per cui vale

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad d_3 > 0$$

$d_1 > 0$ sempre

$d_2 > 0$ se e solo se $t > \frac{1}{6}$

$d_3 > 0$ se e solo se $\begin{cases} t > 0 \text{ e } t > \frac{5}{3} \\ \text{oppure} \\ t < 0 \text{ e } t < \frac{5}{3} \end{cases}$

ossia $t > \frac{5}{3}$

ossia $t<0$

VA escluso quello che chiedo $t > \frac{1}{6}$

Resta la condizione $t > \frac{5}{3}$.

<u>Oss</u> data A SIMMETRICA

scrivere

$$\langle v \mid w \rangle_A$$

significa considerare il prodotto fra matrici

$$^t v \; A \; w$$

Vale inoltre:

$$\langle v | w_1 + w_2 \rangle_A = {}^t v\, A\, (w_1 + w_2) =$$

$$\underbrace{{}^t v\, A\, w_1} + \underbrace{{}^t v\, A\, w_2} =$$

$$= \langle v | w_1 \rangle_A + \langle v | w_2 \rangle_A$$

La bilinearità segue dunque dalla proprietà distributiva del prodotto fra matrici:

$$A(B + C) = AB + AC$$

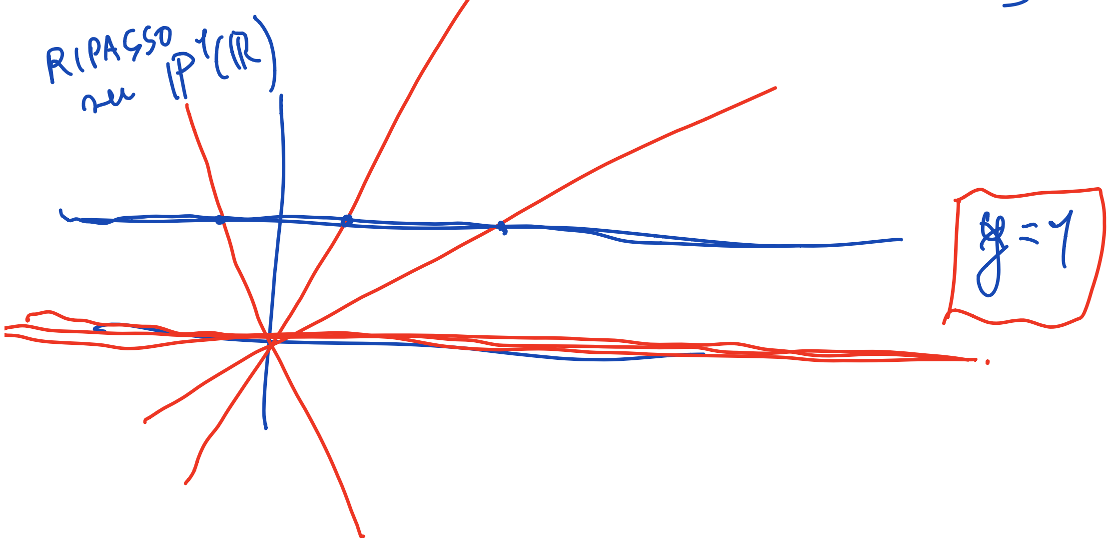
$\boxed{11}$ es 5

Data la quadrica proiettiva

$$\{ [x] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_4 - x_3^2 + x_4^2 = 0 \}$$

determinare il tipo affine della sua intersezione con

$$\{[x]\in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : x_3=1\}$$



Poniamo $x_3=1$ nell'equazione

$$2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 6x_2x_4 - 1 + x_4^2 = 0$$

è una quadrica affine,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q$$

segni di Q | segni di A

$+ \; - \; +$ | $+ \; - \; + \; -$

Tabella a pag 241

iperboloide iperbolico ossia a una falda

y calcoli:

$d_1 = 0$

$d_2 = -1$

$d_3 = -1$

$$d_4 = +2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\, d_3 =$$

$$= 2 \cdot 16 + 1 = 33 > 0$$

Quesiti sulle forme e curve.

$\boxed{39}$ n. 7

Calcolare.

$$\int_{\alpha} \underbrace{\left(2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy\right)}_{\text{forma}}$$

curva

dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è

la curva

$$\alpha = \left(t \cdot \log_2(1+t),\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

Cosa dovremmo calcolare. (Def 15.1.1)

$$\int_{\alpha} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy =$$

$$\int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}\,\underbrace{X'(t)} + \underbrace{g(\alpha(t))}\,\underbrace{Y'(t)}\,dt$$

dove $\alpha(t) = (\underline{\underline{X(t)}}, Y(t))$

e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

Nel nostro caso dovremmo calcolare

$$\int_0^1 -2\,\underbrace{t \log_2(1+t)}_{x}\,\underbrace{\left(\sin \frac{\pi t}{2}\right)^3}_{y^3} \cdot \left(t \log_2(1+t)\right)'$$

$$-3\, t^2 \log_2^2(1+t) \sin^2 \frac{\pi t}{2} \left(-\sin\frac{\pi t}{2}\right)' dt$$

Per FORTUNA la forma in questione è ESATTA

(Def 15.2.3).

Una forma ω si dice esatta se:

$\exists\; U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. ← potenziale.

Ω aperto $\subset \mathbb{R}^2$

$$dU = \omega$$

dove

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy$$

Per la Prop 15.2.2 so che

se $\alpha : [a,b] \to \Omega$ è curva regolare $U : \Omega \to \mathbb{R}$ con derivate parziali continue vale

$$\int_\alpha dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$$

Nel nostro caso

$$\omega = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$$

e si vede subito che

$$\omega = dU = d\,(x^2y^3)$$

Allora nel nostro caso

$$\int_\alpha w = \int_\alpha dU = U(\alpha(1)) - U(\alpha(0))$$

$$\alpha(1) = (1, -1)$$

$$\alpha(0) = (0, 0)$$

Allora

$$U(\alpha(1)) = U((1,-1)) = 1^2(-1)^3 = -1$$

$$U(\alpha(0)) = U((0,0)) = 0^2 0^3 = 0$$

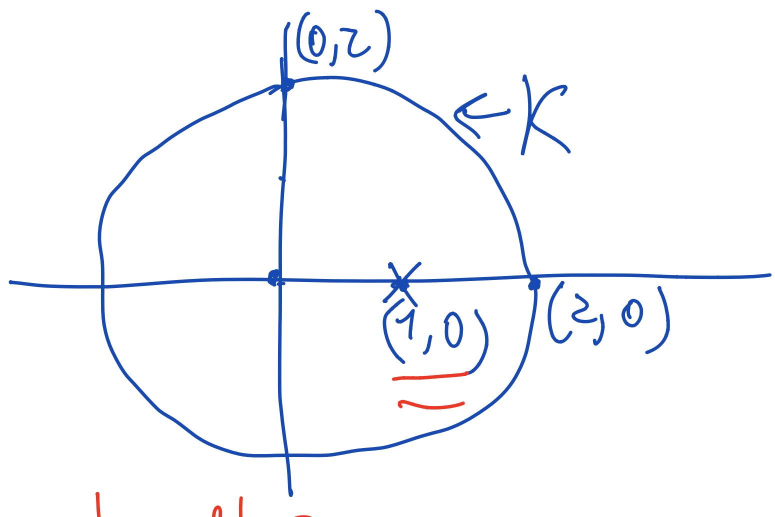
$$\int_\alpha w = -1 - 0 = -1$$

$\boxed{35}$ es 7.

Esibire una 1-forma chiusa ω definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ tale che

$$\int_K \omega = 1$$

dove K è il bordo del disco di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 2



Ricordo l'Osservazione 15.2.9

Se $\omega_0 = \boxed{\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}}$

e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

è una curva chiusa allora

$$\int_\alpha \omega_0 = 2\pi \cdot$$ numero di avvolgimenti di α intorno a $(0,0)$

Osservo che

cambio variabile.

$(x-1)$

$$\omega = \frac{(x-1)\,dy - y\,dx}{(x-1)^2 + y^2}$$

Vale lo stesso con $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$

Quindi

$$\int_{\kappa} \omega = 2\pi$$

Basta prendere

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi}\,\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{(x-1)\,dy - y\,dx}{(x-1)^2+y^2}$$

$\boxed{37}$ es. 7

Si fissi una 1 forma chiusa su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$. Al variare di γ curva semplice chiusa e orientata in A, quanti valori può calcolare $\int_\gamma \omega$?

Ripassiamo il teorema 15.3.5

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato, è la chiusura di un aperto, e ha bordo costituito da un insieme finito di curve regolari a tratti;

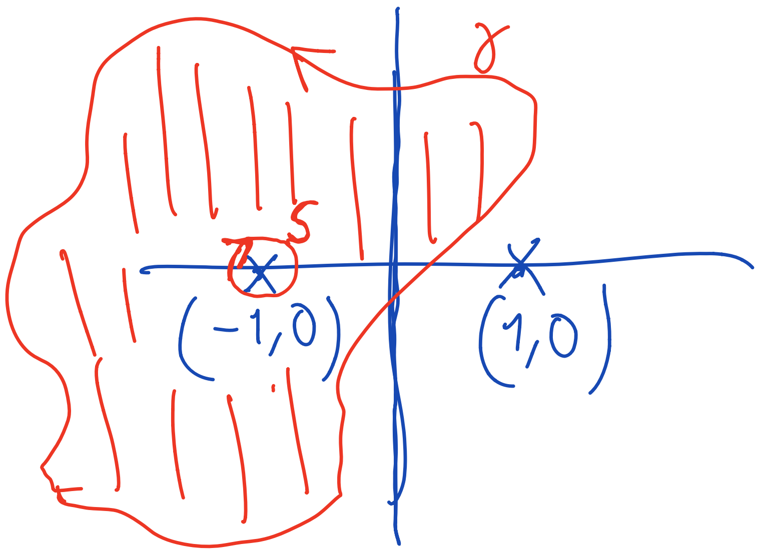
se ω è una 1-forma definita su un aperto che contiene Ω allora

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

bordo di Ω

orientato

Def 15.3.3



Ω la parte di piano compresa fra γ ed S

Ω ha le proprietà del teorema

Poiché ω data dall'esercizio è chiusa.

$d\omega = 0$

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} 0 = 0$$

Allora

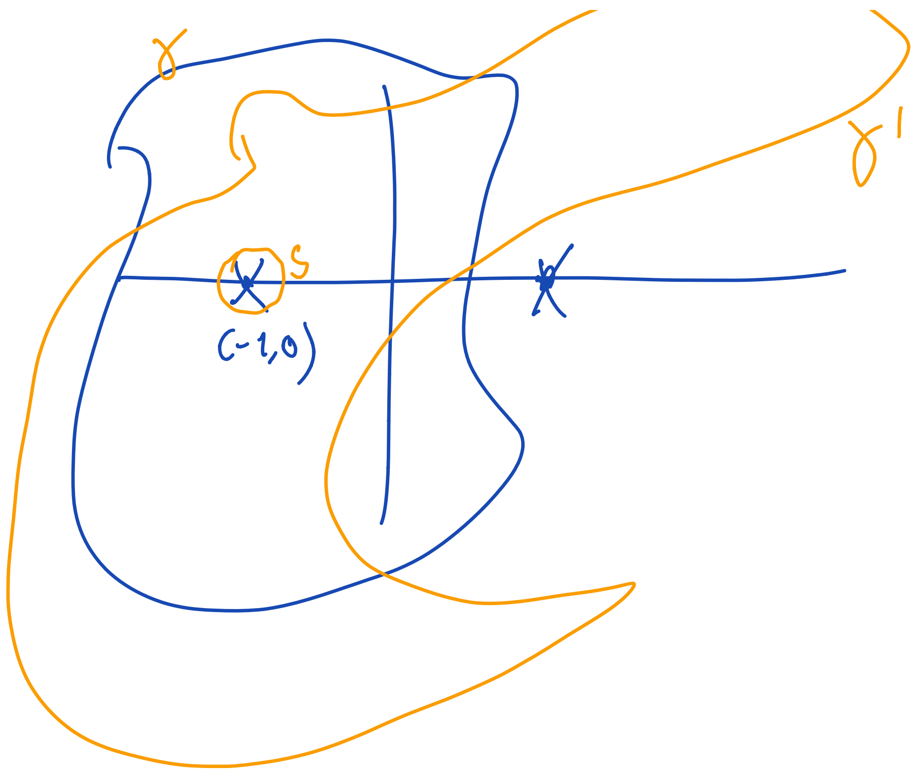
per il Teorema 15.3.5

$$0 = \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\substack{\gamma \\ \text{orientata}}} \omega + \int_{\substack{S \\ \text{orientata}}} \omega$$

quindi

$$\int_{\substack{\gamma \\ \text{orientata}}} \omega = -\int_{\substack{S \\ \text{orientata}}} \omega$$

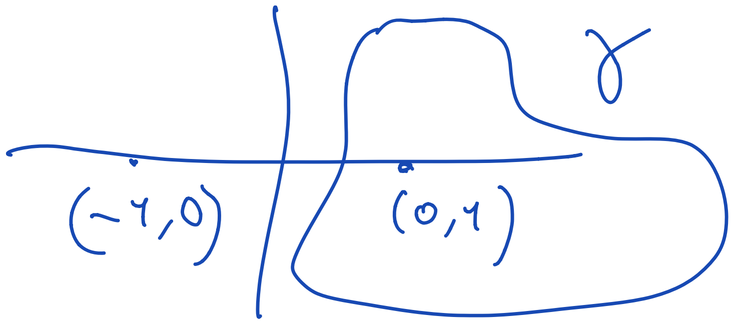
Se invece γ' un'altra curva



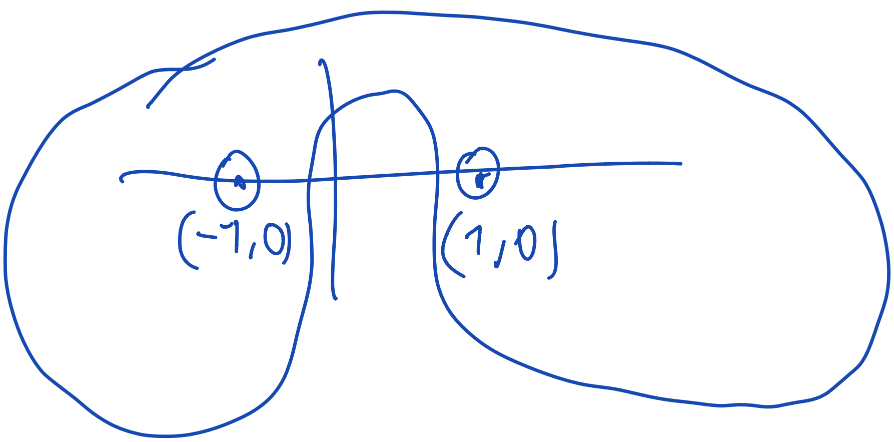
$$\int_{\gamma'} \omega = - \int_{S} \omega$$

Dunque $\displaystyle\int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma} \omega$.

Stesso ragionamento su uno



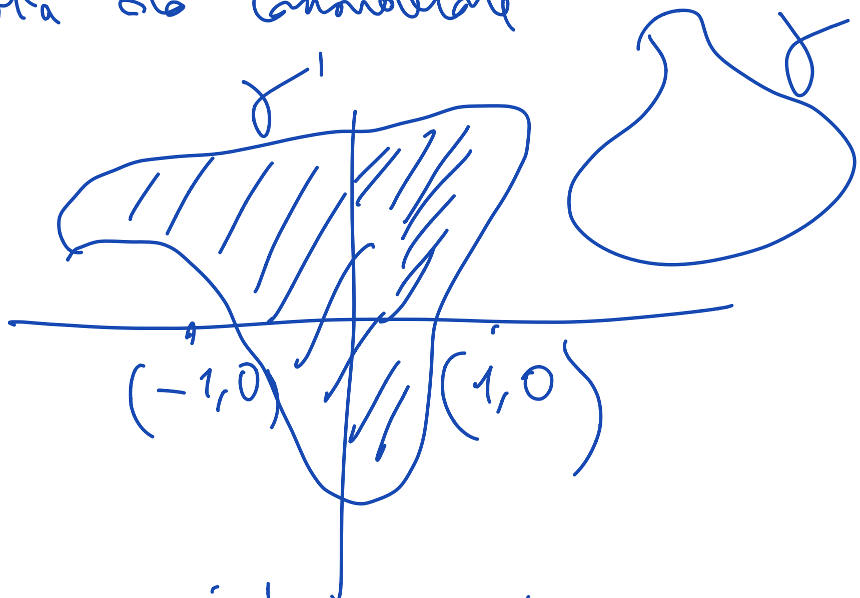
e anche



Per ora ho dunque trovato al massimo 6 possibili valori per

$$\int_\gamma \omega$$

Resta da considerare



Qui ci aiuta il teorema 15.3.8

Se Ω è semplicemente connesso allora ogni 1 forma chiusa su Ω è anche esatta su Ω

Allora nel nostro caso

$$\int_\gamma \omega = \underline{U(\gamma(1))} - \underline{U(\gamma(0))}$$

ma γ è curva chiusa quindi

$\gamma(1) = \gamma(0)$, allora

$$\int_\gamma \omega = 0$$

C'è un settimo valore possibile per $\int_\gamma \omega$ che è 0.

Risposta dunque: al massimo 7

Ricevimento lunedì dalle 16 alg lineare
e dalle 16,30 circa geometria

SU PRENOTAZIONE.