Geometria 12/5/20

https://esami.unipi.it/elencoquestionari.php

FATELO

Per favore compilate i questionari su entrambi i moduli

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto ; 1-forme $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega(x,y) = f(x,y)\cdot dx + g(x,y)\cdot dy$

$\alpha : [a,b] \to \Omega$ $\qquad \displaystyle\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \Big) dt$

$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Esempio: $\omega(x,y) = 3x^2 y\, dx - 8xy^4 dy$ $\qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t^5 - t^3 \\ 7t^4 + 5t \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

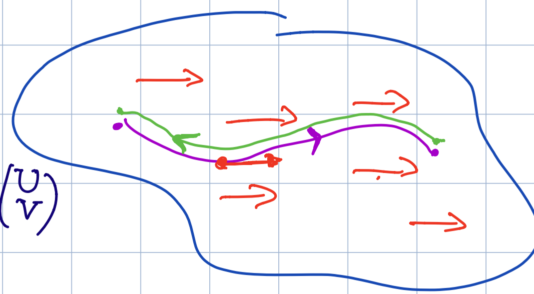
$$\int_\alpha \Big(3(2t^5 - t^3)^2 \cdot (7t^4 + 5t)(10t^4 - 3t^2) - 8(2t^5 - t^3)(7t^4+5t)^4 \cdot (28t^3 + 5) \Big) dt = \dots$$

Prop: $\displaystyle\int_\alpha \omega$ non dipende dalla parametrizzazione se è preservata orientazione; se no cambia segno.

Dim:

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{\alpha} & \Omega \\ \tau \uparrow & \nearrow_{\beta} & \\ [c,d] & & \end{array}$$

$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$



$$\int_\beta \omega = \int_c^d \Big(f(\beta(s))\cdot U'(s) + g(\beta(s))\cdot V'(s) \Big)\, ds$$

$\beta = \alpha \circ \tau$
$U = X \circ \tau$
$V = Y \circ \tau$

$$= \int_c^d \Big(f(\alpha(\tau(s)))\cdot X'(\tau(s))\cdot \tau'(s) + g(\alpha(\tau(s)))\cdot Y'(\tau(s))\cdot \tau'(s) \Big)\, ds$$

$=$

- τ crescente, $\tau' > 0$: $\displaystyle = \int_c^d \Big(f(\alpha(\tau(s)))\cdot X'(\tau(s)) + g(\alpha(\tau(s)))\cdot Y'(\tau(s)) \Big) |\tau'(s)|\, ds$
- τ decrescente, $\tau' < 0$: $\displaystyle = \int_c^d \Big(\quad - \; - \; - \quad \Big)\big(-|\tau'(s)|\big)\, ds$

$=$

- $\displaystyle \int_a^b \Big(f(\alpha(t))X'(t) + g(\alpha(t))Y'(t) \Big)\, dt = \int_\alpha \omega$
- $-$ " $\displaystyle = -\int_\alpha \omega$ ∎

Stesso in $\mathbb{R}^n$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\omega = f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n$

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f_1(\alpha(t))\cdot X_1'(t) + \dots + f_n(\alpha(t))\cdot X_n'(t) \Big)\, dt \; ; \; \alpha = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Es: $\omega = (3x - 2z^2)\, dx + (yz + x^2)\, dy + (\sin(xzy^2) + 1)\, dz$

$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ \cos(t) \\ e^{5t} \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0,1]$

$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 \Big(\big(3(3t^2-1) - 2(e^{5t})^2\big) \cdot 6t$$
$$+ \big(\cos(t) \cdot e^{5t} + (3t^2-1)^2\big)(-\sin(t))$$
$$+ \sin\big((3t^2-1)e^{5t} \cdot \cos^2(t) + 1\big) \cdot 5e^{5t} \Big)\, dt = \ldots$$

---

v campo di forze su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \alpha : [a,b] \to \Omega$

lavoro del campo v lungo α $= \displaystyle\int_a^b \langle v(\alpha(t)) \,|\, \alpha'(t) \rangle \, dt$

$$= \int_a^b \big(v_1(\alpha(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + v_n(\alpha(t)) \cdot x_n'(t) \big) \, dt$$

$$= \int_a^b \omega \qquad \omega = v_1 dx_1 + \ldots + v_n dx_n$$

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \iff v_1 dx_1 + \ldots + v_n dx_n}$$

Campi conservativi : dati da una differenza di potenziale
(es: campo gravitazionale / elettrico; attrito : no)

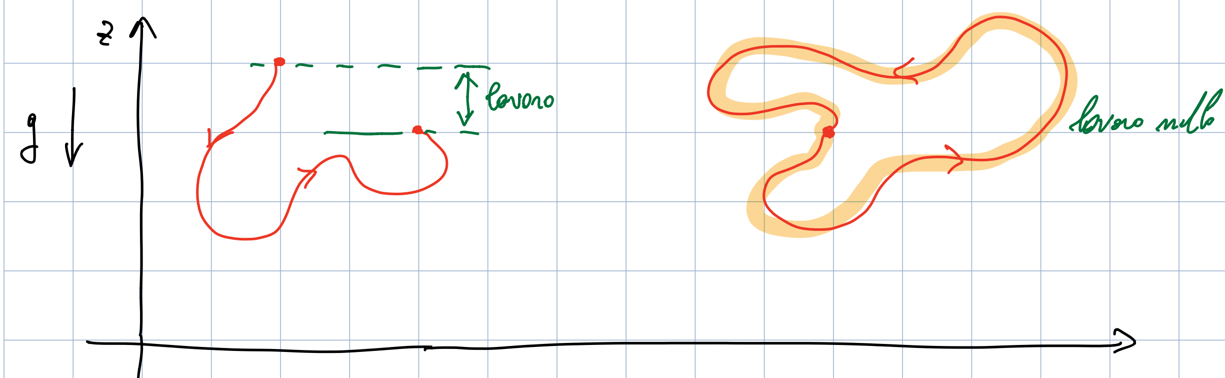
Cioè:
$$\exists U : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad v = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial U/\partial x_n \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(U)$$

A tale U è associata la 1-forma :
$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n}$$: la chiamo dU "differenziale di U"

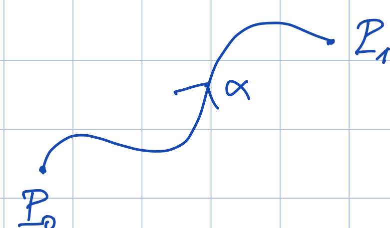
Es: $U(x,y) = \cos(7x^2+y) - e^{5xy^3}$

$$dU(x,y) = \left(-\sin(7x^2+y)\cdot 14x - 5y^3 e^{5xy^3}\right)dx + \left(-\sin(7x^2+y)\cdot 1 - 15xy^2 \cdot e^{5xy^3}\right)dy$$

Fatto: per un campo conservativo il lavoro fatto lungo una traiettoria è la differenza di potenziale fra gli estremi ($\Rightarrow$ per circuito chiuso, lavoro 0).



Prop: $\boxed{\displaystyle\int_\alpha dU = U(P_1) - U(P_0).}$



Dim:

$$\int_\alpha dU = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t)\end{pmatrix} \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t)\end{pmatrix} \cdot Y'(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d(U\circ\alpha)}{dt}(t)\, dt = (U\circ\alpha)\Big|_a^b = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$$

$\blacksquare$

Q: per quali $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ esiste U t.c. $\omega = dU$?

Def: una ω t.c. $\omega = dU$ è detta <u>esatta</u>.

Oss: se $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ è esatta, $\omega = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$
allora ho $f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$. Però so:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(g) = \frac{\partial}{\partial y}(f)$$

Dunque: condizione <u>necessaria</u> perché $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ sia esatta è che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$;

↳ se accade questo dico ω <u>chiusa</u>

$\boxed{\text{esatta} \Rightarrow \text{chiusa}}$

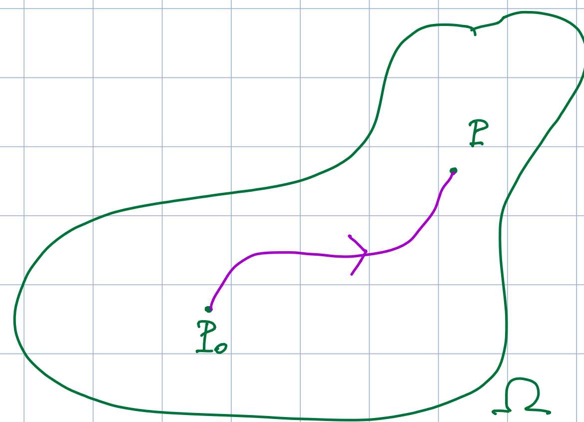
Q: in quali casi una chiusa è esatta [Non sempre.]

Prop: ω 1-forma su Ω;

ω esatta $\Longleftrightarrow$ $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi di α, $\forall \alpha : [a,b] \to \Omega$

Dim: $\Longrightarrow$ visto.

$\Longleftarrow$: se U esiste allora $\int_\alpha \omega = U(P) - U(P_0)$.



Definisco allora $\underbrace{U(P)}_{U \text{ così: fisso } P_0 \text{ e pongo}} = \int_\alpha \omega$ dove α è qualsiasi

grazie all'ipotesi, U è ben definita (non dipende da α)

Resta da vedere che se $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ allora $f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$.

[Domani.]