

17

1. $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

- A ha autovalori interi negativi

Si ha $P_A(t) = t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

Quanto può valere a_1 ?

Lo che

$$P_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ interi < 0

$$P_A(t) = (t + |\lambda_1|)(t + |\lambda_2|)(t + |\lambda_3|)$$

$$P_A(t) = t^3 + (|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|)t^2 + \underbrace{(|\lambda_1||\lambda_2| + |\lambda_1||\lambda_3| + |\lambda_2||\lambda_3|)}_{\leftarrow a_1}t + |\lambda_1||\lambda_2||\lambda_3|$$

Perché $|\lambda_1| \geq 1$ $|\lambda_2| \geq 1$ $|\lambda_3| \geq 1$

deduco che $a_1 \geq 3$

↑
è la risposta.

2) Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 1+2i & -1-i \end{pmatrix}$$

e una base (v_1, v_2) di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

$$\begin{aligned} P_A(t) &= t^2 - (\text{traccia } A) t + \det A \\ &= t^2 - t + (1+i) \end{aligned}$$

Cerco le radici

$$\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$$

Cerchiamo le radici quadrate di Δ

$$(a+bi)^2 = -3-4i$$

$$\underline{a^2 - b^2} + \underline{2abi} = \underline{-3} - \underline{4i}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = -2 \end{cases}$$

soluzioni

$$a=1 \quad b=-2$$

$$1-2i$$

$$a=-1 \quad b=2$$

$$-1+2i$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} \frac{1 + 1-2i}{2} = 1-i \\ \frac{1 - (1-2i)}{2} = i \end{cases}$$

Gli autovettori di A sono $1-i$ e i

Cerco i corrispondenti autovettori

$$V_{1-i} = \text{Ker} \left((1-i)I - A \right) =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1-i-2-i & 2 \\ -1-2i & 1-i+1+i \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -1-2i & 2 \\ -1-2i & 2 \end{pmatrix}$$

so che
Ker ha
dim 1

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1+2i \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_i = \text{Ker} (\lambda I - A) = \dots$$

$$\dots = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La base cercata è (a meno di scalari)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+2i \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori

$$\text{di } A = \begin{pmatrix} \underline{2k} & \underline{1} & -1 \\ \underline{1} & \underline{2} & -2 \\ -1 & -2 & k \end{pmatrix} \quad \text{sono reali?}$$

Per quali K sono positivi?

Dato che A è simmetrica, per il Teorema Spettrale $\Rightarrow$ che i suoi valori sono reali.

Dunque risposta: $\forall K \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali

Calcola d_1, d_2, d_3

$$d_1 = 2K$$

$$d_2 = 4K - 1$$

$$d_3 = 4K^2 - 9K + 2$$

$$\begin{array}{ccccc} 2K & 1 & -1 & 2K & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & K & -1 & -2 \end{array}$$

$$4K^2 + 2 + 2 - 2 - 8K - K$$

Per avere autovetture ^{tutte} positive, devo avere

$$\underline{d_1 > 0} \quad \text{cioè} \quad 2K > 0 \quad \text{cioè} \quad \underline{K > 0}$$

(se $d_1 = 0$ allora $K = 0$ allora $d_2 = -1$)

Studio anche

$$d_2 > 0 \quad \text{ovvero} \quad 4K - 1 > 0$$

$$\text{ovvero} \quad \underline{K > \frac{1}{4}}$$

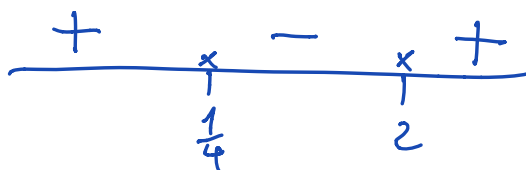
Voglio infine anche.

$$d_3 > 0$$

$$4K^2 - 9K + 2 > 0$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49$$

$$K_{1,2} = \begin{cases} \frac{9+7}{8} = 2 \\ \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$



Dunque $d_3 > 0$ se $K > 2$

oppure $K < \frac{1}{4}$

Gli unici K che soddisfano tutte le richieste sono i $K > 2$

4) Trovare i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, con seconda coordinata immaginaria pura e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 3+i \end{pmatrix}$

Cerco i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ i \end{pmatrix}$$

e normalizzo alla fine

Dare vedere

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1-2i \\ 3+i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a+bi \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

her standard.

$$(a-bi)(1-2i) - i(3+i) = 0$$

$$(a-2b+1) - (2a+b+3)i = 0$$

$$\begin{cases} a-2b+1 = 0 \\ 2a+b+3 = 0 \end{cases}$$

soluzioni:

$$a = -\frac{7}{5} \quad b = -\frac{1}{5}$$

Così ho il vettore

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \\ i \end{pmatrix} = v$$

Reata só da normalizar

$$\|v\|^2 = \frac{49}{25} + \frac{1}{25} + 1 = \frac{75}{25} = 3$$

Resposta

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -7 - i \\ 5i \end{pmatrix}$$

Calcolo lievemente ^{almeno pochi} "puro di frazioni"

$$\begin{pmatrix} -7 - i' \\ 5i' \end{pmatrix} = \underline{\underline{v'}}$$

$$\|v'\|^2 = 49 + 1 + 25 = 75$$

Quindi

$$\pm \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{pmatrix} -7 - i' \\ 5i' \end{pmatrix} =$$

$$= \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -7 - i' \\ 5i' \end{pmatrix}$$

6 Determinare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'intersezione degli insiemi.

$$A = \{ [t+1 : -t : 2t+1] : t \in \mathbb{R} \} \leftarrow$$

$$B = \{ [t+1 : t^2-5 : t+5] : t \in \mathbb{R} \}$$

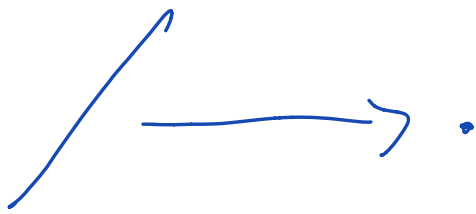
lo stesso

$$B = \{ [x+1 : x^2-5 : x+5] : x \in \mathbb{R} \}$$

I punti di A sono le immagini dei punti di $\mathbb{R}^3$ con coordinate

$$\frac{(\lambda(t+1), \lambda(-t), \lambda(2t+1))}{(\text{diversa da } (0,0,0))} \quad |$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$



Tali punti appartengono al piano

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Un punto di $B \cap A$ corrisponde
all'immagine di un punto di $\mathbb{R}^3$ che
è del tipo

$$\rightarrow (\lambda(t+1), \lambda(t^2-5), \lambda(t+5))$$

e che giace sul piano

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

(è condizione necessaria)

Verifico (il λ non conta)

$$(x+1) - (x^2-5) - (x+5) = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Prova $x = 1$

in B

$$[2 : -4 : 6] = [1 : -2 : 3]$$

che appartiene anche ad A

(potete

verificare ponendo $t = -2$ nell'eq di A

$$[-1 : 2 : -3] = [1 : -2 : 3]$$

$$[t+1 : -t : 2t+1]$$

$$3(t+1) = 2t+1 \quad t = -2$$

Prova $x = -1$

in B

$$[0 : -4 : 4] = [0 : 1 : -1]$$

che appartiene anche ad A

lo risulta con $t = -1$

$$[0 : 1 : -1] \leftarrow$$

§ sullo stesso tema

$$A = \{ [7-s : 1-s : 3s] \mid s \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ [-2\gamma : 1-\gamma : 1+\gamma] \mid \gamma \in \mathbb{R} \}$$

I punti di B sono immagini dei punti di $\mathbb{R}^3$ del tipo

$$\lambda \begin{pmatrix} -2\gamma \\ 1-\gamma \\ 1+\gamma \end{pmatrix} \rightarrow [-2\gamma : 1-\gamma : 1+\gamma]$$

non $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

fissato γ
l'intera retta

$\lambda \begin{pmatrix} -2\gamma \\ 1-\gamma \\ 1+\gamma \end{pmatrix}$ va nello stesso punto di B

Noto che i punti $\begin{pmatrix} -2\gamma \\ 1-\gamma \\ 1+\gamma \end{pmatrix}$ giacciono

nel piano.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Allora i punti di $B \cap A$

sono immagini dei punti di $\mathbb{R}^3$

$$\rightarrow \gamma \begin{pmatrix} 7-s \\ 1-s \\ 3s \end{pmatrix}$$

i punti che
si proiettano
in A

e giacciono in

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

↑ cond necessaria
per proiettarsi
in B

Trovare il γ e impang

$$(7-s) - (1-s) + 3s = 0$$

$$7 - \cancel{s} - 1 + \cancel{s} + 3s = 0$$

$$3s = -6$$

$$\boxed{s = -2}$$

In A to

$$\begin{aligned} [9 : 3 : -6] &= \\ &= [3 : 1 : -2] \end{aligned}$$

In B

$$-2\gamma = 3(1-\gamma)$$

$$-2\gamma = 3 - 3\gamma$$

$$-\gamma = 3 \quad \text{Augment B trans.}$$

$$\begin{aligned} [-6 : -2 : 4] &= \\ &= [3 : 1 : -2] \end{aligned}$$

Esercizio sempre su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$A = \{ [t+2 : t^2+3 : t+6] : t \in \mathbb{R} \}$$

B la retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per
 $[1:2:3]$ e $[3:-1:5]$

Studio prima B. Poiché è una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è immagine di un piano in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

Basta trovare a, b, c , (a meno di uno scalare)

Lo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartengono

a questo piano

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 3 = 0 \\ a \cdot 3 + b \cdot (-1) + c \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

Soluzioni:

c libero $a = -\frac{13}{7}c$ $b = 3a + 5c$

Rango $C = 7$

$$a = -13 \quad b = -4 \quad c = 7$$

Riassumendo,
la retta B di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è l'immagine del piano

$$\begin{cases} -13x - 4y + 7z = 0 \end{cases} \quad \text{di } \mathbb{R}^3$$

Perché un punto stia in $B \cap A$

bisogna che sia immagine di un punto di $\mathbb{R}^3$
della forma

$$\gamma \begin{pmatrix} t+z \\ t^2+3 \\ t+6 \end{pmatrix}$$

e che appartenga a

$$-13x - 4y + 7z = 0$$

Trovo il γ e ottengo

$$-13(t+z) - 4(t^2+3) + 7(t+6) = 0$$

$$-4t^2 - 6t + 4 = 0$$

$$4t^2 + 6t - 4 = 0$$

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} \frac{-6+10}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{-6-10}{8} = -2 \end{cases}$$

Per $t = \frac{1}{2}$ in A trova

$$\left[\frac{5}{2} : \frac{13}{4} : \frac{13}{2} \right] = [10 : 13 : 26]$$

che è anche in B perché

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}$$

giacè in $-13x - 4y + 7z = 0$

Per $t = -2$ in A trova.

$$[0 : 7 : 4]$$

che è anche in B come sopra.

