

37

4) tipo affino di

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - \sqrt{3}x + 11 = 0$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$d_3 =$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 11 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}$$

$$22 - \frac{3}{2} - \frac{99}{4} = \frac{88 - 6 - 99}{4} < 0$$

la conica è non degenera
ed è iperbole.

5) tipo iperbole

$$2xy + y^2 - z^2 - 4x + z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 0$$

no Prop. 13.4.2.

ma si applica la Prop. 13.4.3

se $d_4 \neq 0$

● $d_2 = -1$

● $d_3 = (-1) \cdot d_2 = 1$

● $\left(\frac{d_3}{d_2} < 0 \right)$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

facile prima una mossa di colonna o
riga di quelle che non cambiano il
det

$$d_4 = 2 \cdot d_3$$

$$\frac{d_4}{d_3} > 0$$

segni di Q
segni di A

$$\begin{pmatrix} - & + & - \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

class. $++- \mid ++--$
quadrante a una folia

6) Calcolare autovalori e Hessiana in $(0,0)$

$$f(x,y) = y^2 + \exp(2x + 2ny)$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{2x+2ny} \cdot 2 \\ 2y + e^{2x+2ny} \cdot \cos y \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 e^{2x+2ny} & 2 e^{2x+2ny} \cdot \cos y \\ 2 e^{2x+2ny} \cos y & 2 + e^{2x+2ny} \cos^2 y - e^{2x+2ny} \sin y \end{pmatrix}$$

At $(0,0)$, the Hessian matrix is:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

The eigenvalues are $\lambda_1 = 3$ and $\lambda_2 = 1$, both positive, indicating a local minimum at $(0,0)$.

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

o calcolate il pol caratteristico

$$p(t) = t^2 - 7t + 8$$

$\uparrow$
 - traccia

$\uparrow$
 + det

$$= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

o trovate le radici di $p(t)$ con
la formula risolutiva

oppure

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

In ogni caso trovato

$$\lambda_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

43

1) In $\mathbb{R}^2$ se

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{base}$$

$$\beta' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{base}$$

$$\text{L'ra } [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

trovare $[v]_{\beta'}$

$[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ significa che

$$v = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↑
reg alla
base standard.

es6

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \underset{\uparrow}{a} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \underset{\uparrow}{b} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{e}$ un'ortona

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nota che l'inverso di

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{e} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $\frac{1}{\det}$

Moltiplico a sin e a destra per l'inversa.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\beta^1} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2) Per quali k è diagonalizzabile la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 \\ 1 & k-1 & k^2 \end{pmatrix}$$

$$p_A = (t-1)(t-k)(t-k^2)$$

dunque certamente se

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ X & & X \\ K^2 & \neq & K \end{array}$$

A è diagonalizzabile.

Coni "periodici",

$$K = 1$$

$$K = K^2 \Leftrightarrow K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^2 = 1 \Leftrightarrow K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Però studiare allora i coni

$$K = 1$$

$$K = 0$$

$$K = -1$$

$$\text{Cov } K = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A = (t-1)^3$$

autoregolare 1 con m.a. 3

calcolo m.g. (1) con

$$\dim \text{Ker} (1I - A) =$$

$$\dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{Allora } m.g.(1) = 2 < m.a.(1)$$

e A non è diag.

$$\boxed{\text{Case } \lambda = 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A = (t-1) t^2$$

$$m.a.(0) = 2$$

$$m.g(0) = \dim \text{Ker} (0I - A)$$

$$= \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$m.g(0) = 1 < m.a.(0) = 2$$

quindi A non è diag.

$$\boxed{\text{Caso } K = -1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$p_A = (t-1)^2(t+1)$$

$$m.a(1) = 2$$

$$m.g(1) = \dim \text{Ker}(1I - A) =$$

$$= \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$m.a(1) = m.g(1) = 2$$

Per questo A è diagonalizzabile.

Conclusione.

La matrice data è diagonalizzabile

$$\forall K \neq 0, 1$$

$$3) \quad x^2 + 3xy + zy^2 + x = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$d_3 = \frac{1}{2} (-1) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

È una iperbole (Teorema 13.2.3)

4) Determinare un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ e avente seconda coordinata immaginaria pura.

È del tipo

$$k \begin{pmatrix} a+bi \\ i \end{pmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

il k lo trovo, tanto alla fine devo normalizzare il vettore.

Impung

$$\left\langle \begin{pmatrix} z+i \\ 1-i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a+bi \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

↑
hermitian
scalar

$$(a-bi)(z+i) - i(1-i) = 0$$

$$(za + b - 1) + (a - 1 - zb)i = 0$$

$$\begin{cases} za + b = 1 \\ a - zb = 1 \end{cases}$$

Lösung: $a = \frac{3}{5} \quad b = -\frac{1}{5}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}i \\ & i \end{pmatrix}$$

prendo un suo multiplo

$$\begin{pmatrix} 3 - i \\ 5i \end{pmatrix}$$

e noto che ha norma

$$\sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle_{\text{herm.}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 5i \end{pmatrix}$$

$$\langle v | w \rangle = 0$$

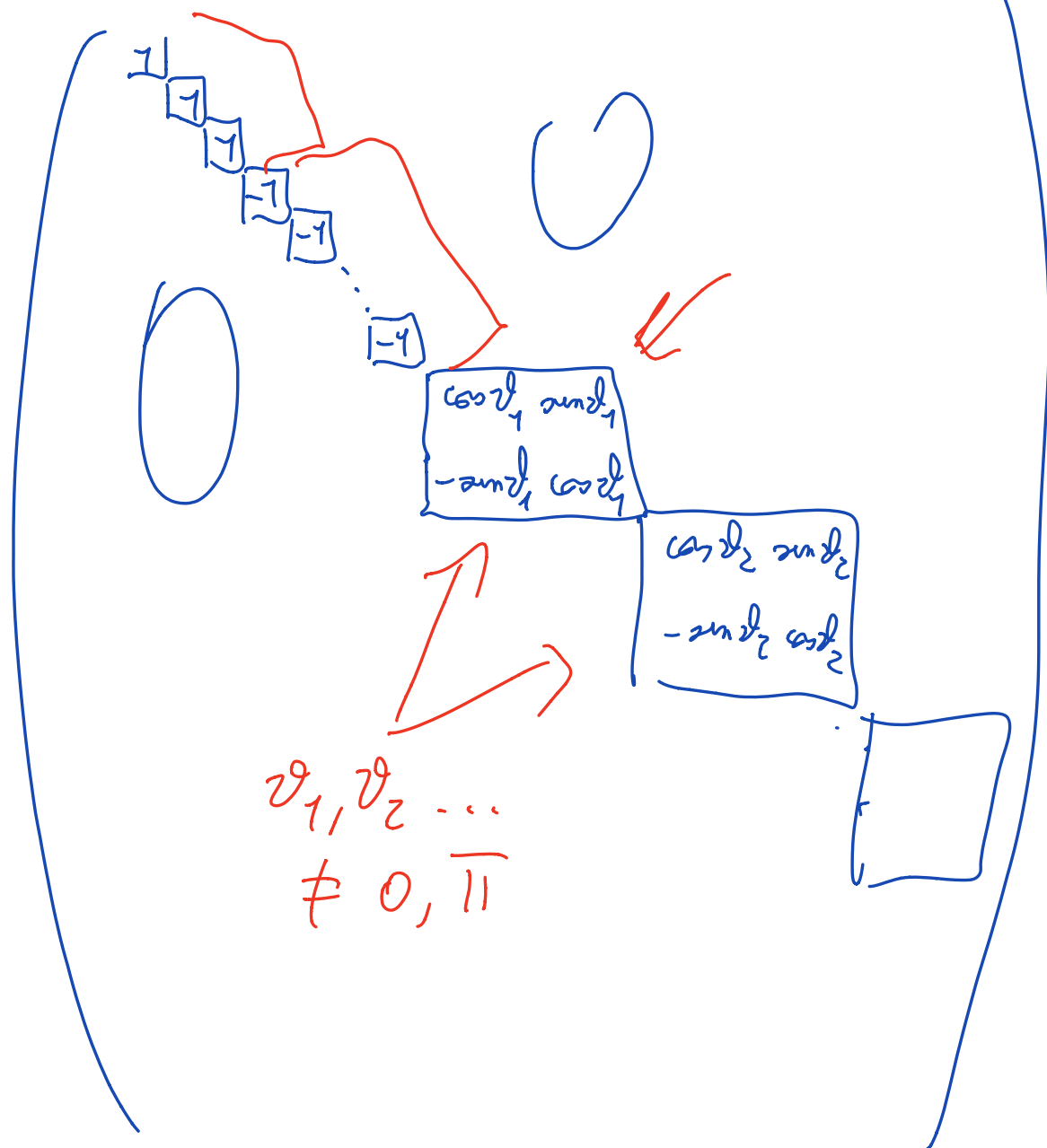
equivalente a dire $\langle w, v \rangle = 0$

$$\langle v | w \rangle = \overline{\langle w | v \rangle}$$

5) Qual è la forma canonica di una matrice $n \times n$ ortogonale reale con autovalori reali?

Dalla Teoria (Teorema 10.2.11)
 sappiamo che una matrice ortogonale reale

ha forma canonica



$$\det \begin{pmatrix} t - \cos \theta_1 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & t - \cos \theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= t^2 - 2 \cos \vartheta_1 + 1$$

le radici sono

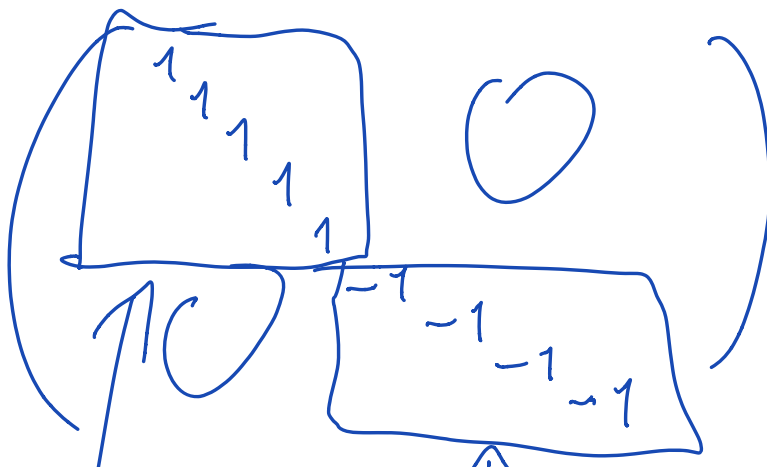
$$\cos \vartheta_1 \pm i \sin \vartheta_1$$

per $\vartheta_1 \neq 0, \pi$

sono in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

deduco che i blocchi 2×2 in questo caso non ci sono, perché dovrebbero autovalori non reali.

Allora la forma canonica è



$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ \left(& & \right) \\ k \times k & & (n-k) \times (n-k) \end{array}$$

can $0 \leq k \leq n$

6) type affine quadrics

$$x^2 + 2xy - 6yz + 5z^2 - 4x + 2y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \downarrow 1 & 0 & \downarrow -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = -1$$

$$d_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = -9 - 5 = -14$$

$$d_4 = 81$$

Allora

segni di Q

$$\begin{matrix} \frac{d_1}{d_0} & \frac{d_2}{d_1} & \frac{d_3}{d_2} \\ + & - & + \end{matrix}$$

segni di A

$$\begin{matrix} + & - & + & \frac{d_4}{d_3} \\ & & & \smile \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} + & + & - & & & \\ & & & + & + & - - \end{array}$$

quadrato a una folia

(Teorema 13.4.1)

7) In $\mathbb{C}^7$

$$V = \left\{ z \in \mathbb{C}^7 : \sum_{n=1}^7 (-i)^n z_n = 0 \right\}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^7$$

Nota che V ha dimensione 6.

La domanda è:

dati $v_1, v_2, v_3 \in V$

si cerca di costruire una base di

V che contenga più el. possibile

zitti da $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Quanti nuovi elementi devo prendere?

Risposta.

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Per avere una base di V

devo aggiungere

$$\overset{6}{\text{dim } V} - \text{dim Span}(v_1, v_2, v_3)$$

vettori nuovi.

assim

6 - um Lyon (v_1, v_2, v_3)

Seja um número x com

$$3 \leq x \leq 6$$
