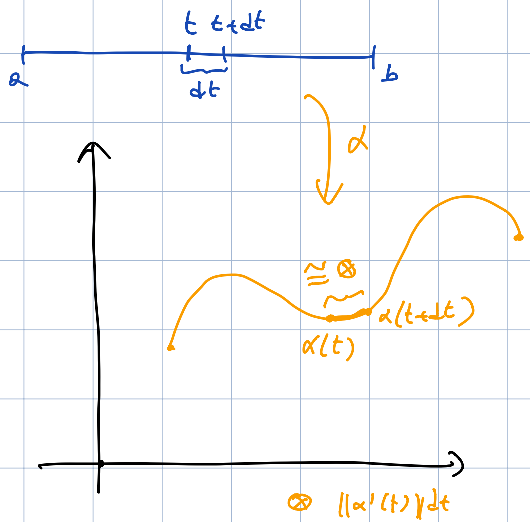
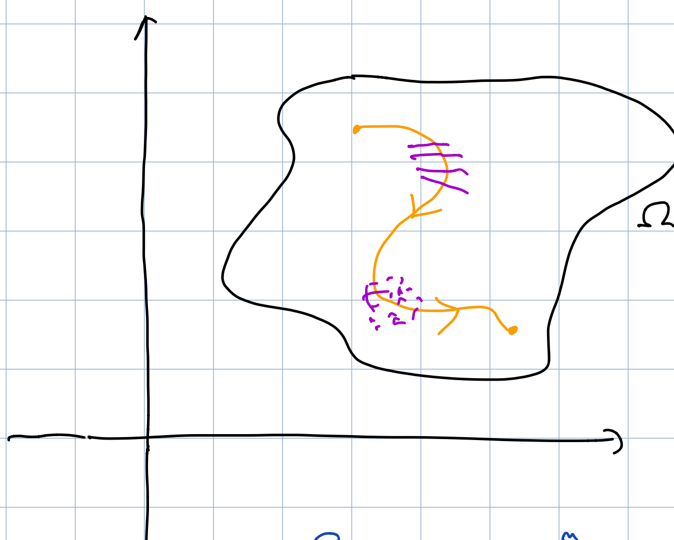
# Geometria 28/4/2020

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile $\qquad \alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t$

$$L(\alpha) = \int_a^b \underbrace{\|\alpha'(t)\|\,dt}_{\text{el. di lunghezza lungo la curva}}$$




"costo" del passo elementare $\|\alpha'(t)\|\,dt$ può dipendere dal pto $\alpha(t)$ secondo una $F(\alpha(t))$.

<u>Cioè</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}$

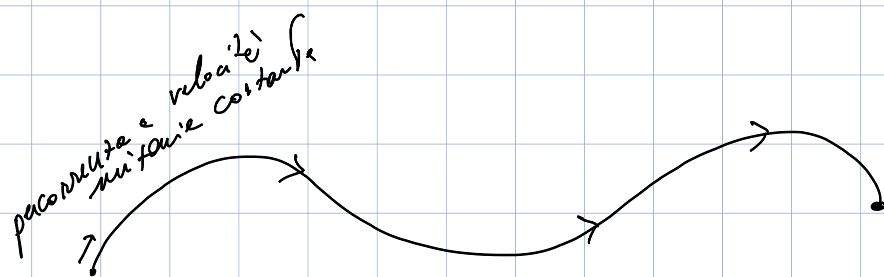
$$\underbrace{\int_\alpha F}_{} = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\,dt$$

integrale lungo $\alpha$ della funzione <u>scalare</u> $F$

a valori numerici

ATT: non confondere con $\int_\alpha (\text{forma})$

---




Diciamo $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| = 1$ $\forall t$ (velocità costante unitaria).

Prop: se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è curva di lunghezza $L$ esiste $\tau : [0,L] \to [a,b]$ crescente t.c. $\beta = \alpha \circ \tau$ sia in parametro d'arco.

Dim:

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend left, "\sigma"] & \mathbb{R}^n \\
{[0,L]} \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Vogliamo $\|\beta'(s)\| \equiv 1$.

$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$ $\qquad \beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$

$1 = \|\alpha'(\tau(s))\| \cdot \tau'(s)$

$$\boxed{\tau'(s) = \|\alpha'(\tau(s))\|^{-1}}$$

$\sigma = \tau^{-1}$ $\qquad \sigma(\tau(s)) = s$ $\qquad \sigma'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) = 1$

$$\boxed{\tau'(s) = \sigma'(\tau(s))^{-1}}$$

$\Rightarrow \sigma'(\tau(s)) = \|\alpha'(\tau(s))\|$ cioè $\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|$

$$\Rightarrow \quad \sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\,du .$$

Conclusione: si pone $\sigma : [a,b] \to [0,L]$ come

$$\sigma(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du \quad e \quad \tau = \sigma^{-1}. \qquad \blacksquare$$

usare $\sigma$ come tempo significa usare lo spazio percorso $\Rightarrow$ velocità 1.

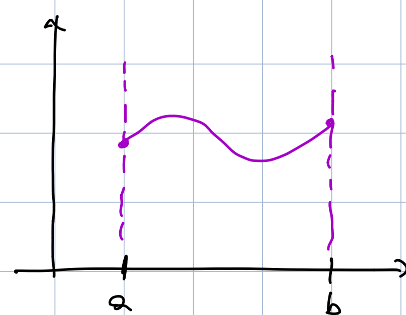
— o —

Oss: il grafico di una funzione $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una curva in $\mathbb{R}^2$.

$\alpha(t) = (t, u(t))$

$\alpha'(t) = (1, u'(t)) \neq 0 \ \forall t$

$\Rightarrow$ curva regolare.

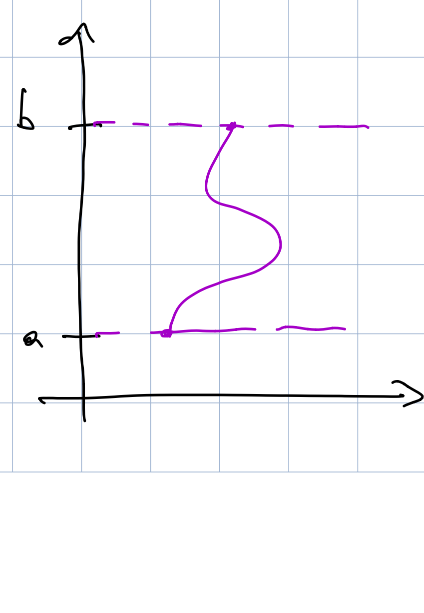



Oss: stesso per grafico di $x$ come funzione di $y$:

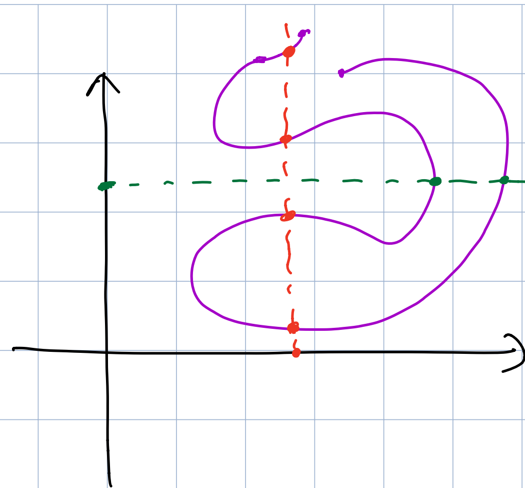
$v : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\alpha(t) = (v(t), t)$

regolare

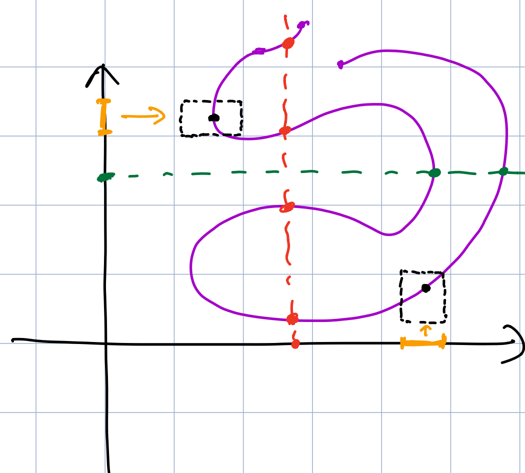


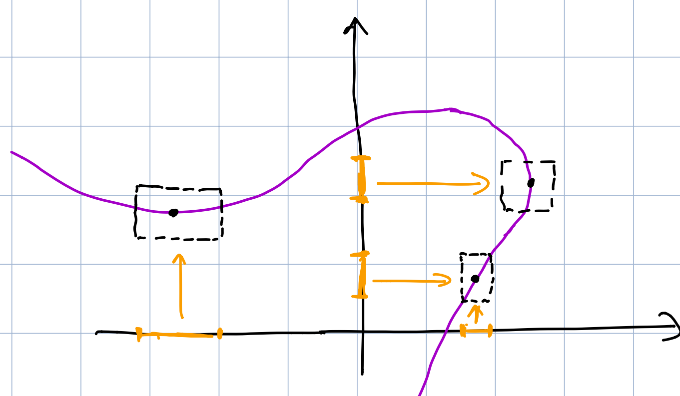
Non è vero che ogni curva :



Prop: ogni curva è "localmente" un grafico

per ogni punto lo è guardando abbastanza vicino a lui.



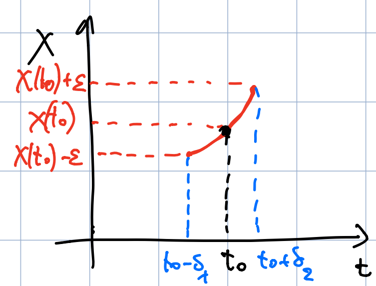


Infatti: dato $t_0 \in (a,b)$ ho $\alpha'(t_0) \neq 0$

$\alpha(t) = (X(t), Y(t))$ $\quad \alpha'(t_0) = (X'(t_0), Y'(t_0))$

$\Longrightarrow X'(t_0)$ o $Y'(t_0)$ sono $\neq 0$.

Se $X'(t_0) \neq 0$ allora in $t_0$ la funz. $X$ è crescente o decrescente:




$X|_{[t_0-\delta_1,\, t_0+\delta_2]}$ è bijezione con $[X(t_0)-\varepsilon,\, X(t_0)+\varepsilon]$

dunque vicino a $\alpha(t_0)$ la $\alpha$ è grafico della funzione

$$[X(t_0)-\varepsilon,\, X(t_0)+\varepsilon] \ni x \longmapsto Y(X^{-1}(x))$$

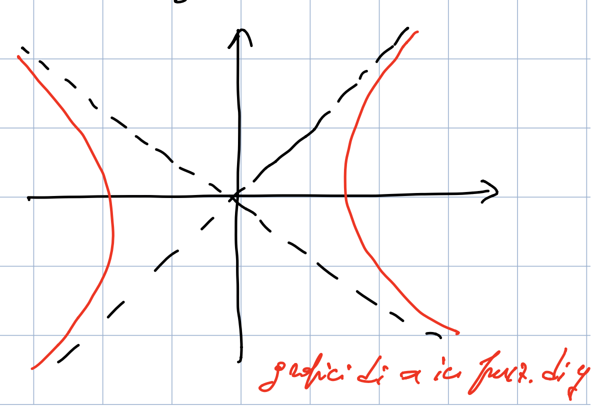
— o —

Le coniche sono curve: $x^2+y^2=1$ $\quad y=x^2$ $\quad x^2-y^2=1$

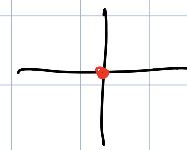
$y = \pm\sqrt{1+x^2}$

Equaz. nelle coordinate che definiscono curve.

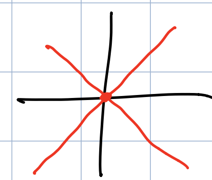
Quali equaz. vanno bene?



Non tutte: $x^2+y^2=0$



$x^2-y^2=0$



$f(x,y)=x^2+y^2$

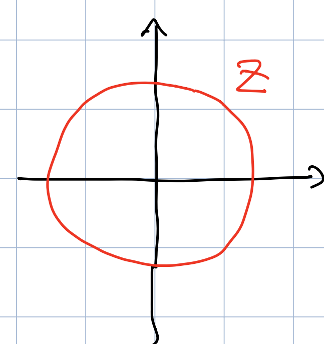
$f(x,y)=x^2-y^2$

$\mathrm{grad}(f)=(2x,2y)$ $\qquad$ $\mathrm{grad}(f)=(2x,-2y)$

nullo nel punto
in cui l'insieme non è curva.

Es: $f(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$

$Z=\{(x,y): f(x,y)=0\}$




$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\text{nullo su } Z}\cdot 2x$$

$\Rightarrow \mathrm{grad}(f)\equiv(0,0)$ su $Z$.

Teo (Dini): sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ aperto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ funz. $C^1$;
$Z_1=\{(x,y)\in\Omega: f(x,y)=0\}$; $(x_0,y_0)\in\Omega$.

Se $\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)\neq 0$ allora $Z_1$ è loc. grafico di $x$ in funz. di $y$ o viceversa; più precisamente:

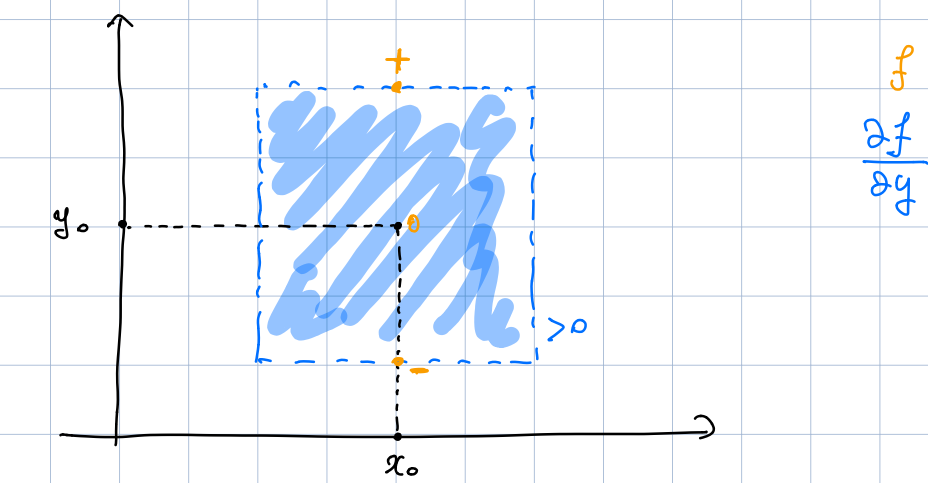
- se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ allora loc. $Z$ è grafico di $y=\Upsilon(x)$ $\quad C^1$

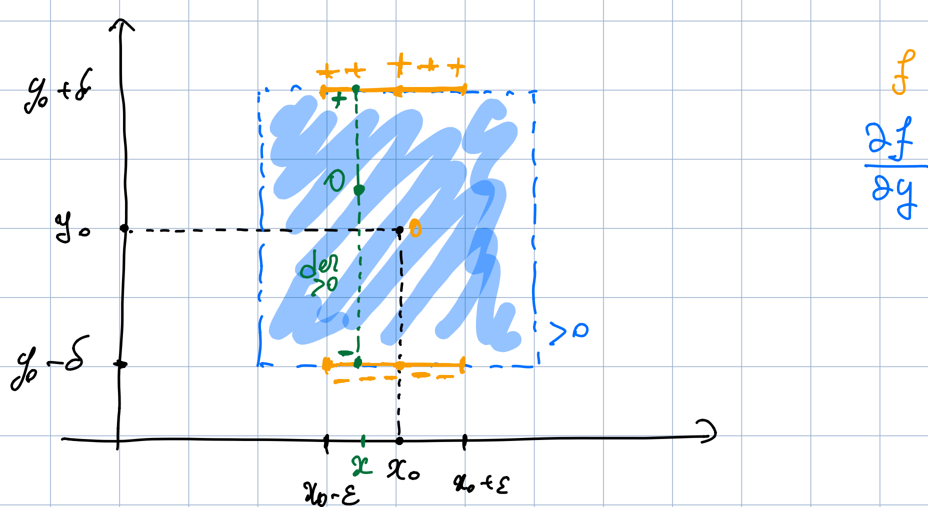
$$\text{con } \Upsilon'(x)=-\frac{\partial f/\partial x\,(x,\Upsilon(x))}{\partial f/\partial y\,(x,\Upsilon(x))}$$

• se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ allora loc. $Z$ è grafico di $x = X(y)$ $C^1$

con $X'(y) = - \frac{\partial f/\partial y\,(X(y),y)}{\partial f/\partial x\,(X(y),y)}$.

"Dimo": tratto il caso $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, anzi prendo $> 0$.

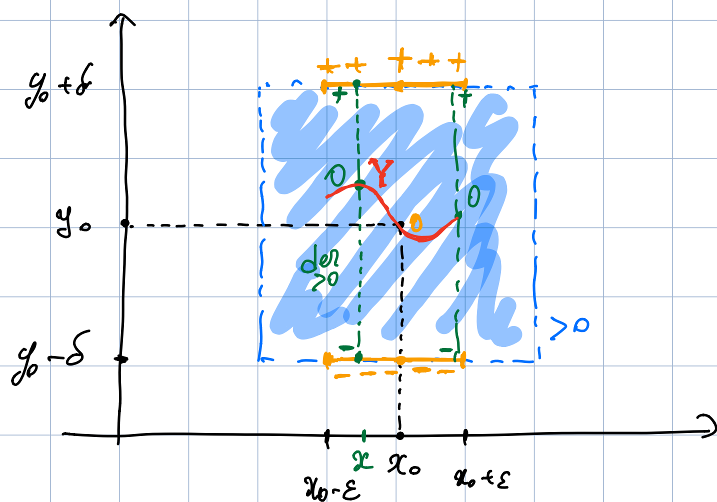



$\forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ $\exists\, Y(x)$ che è l'unico punto $y$ in cui

cui $f(x,y)=0$

$\Rightarrow Z \cap \left([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times [y_0-\delta, y_0+\delta]\right)$ è grafico della funzione Y trovata




Ora calcolo $Y'(x)$ : so che $(x, Y(x)) \in Z$ $\forall x$ cioè

$f(x, Y(x)) \equiv 0$

Derivo:

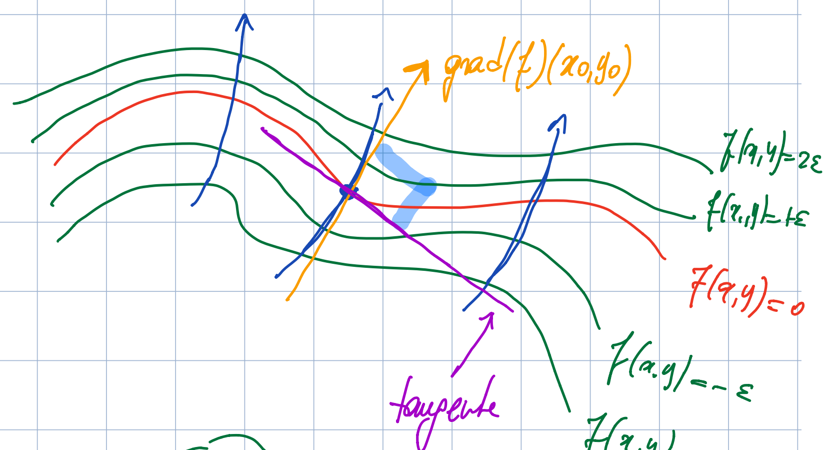
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x)) \cdot Y'(x) = 0$$

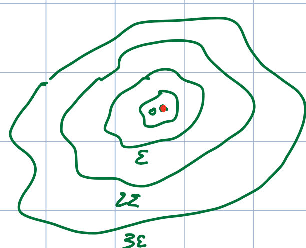
$$\Rightarrow Y'(x) = - \frac{\partial f/\partial x\,(x, Y(x))}{\partial f/\partial y\,(x, Y(x))}. \qquad \square$$

PRIMA DOVREI DIMOSTRARE CHE ESISTE

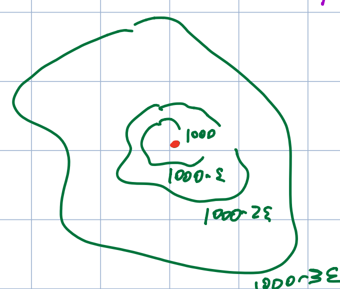
(non banale)

Cor: se $Z = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ e $\text{grad}(f)(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in Z$ allora $Z$ è curva (o unione di curve) e nel pto $(x,y)$ la sua retta tangente è $\perp$ $\text{grad}(f)(x,y)$.

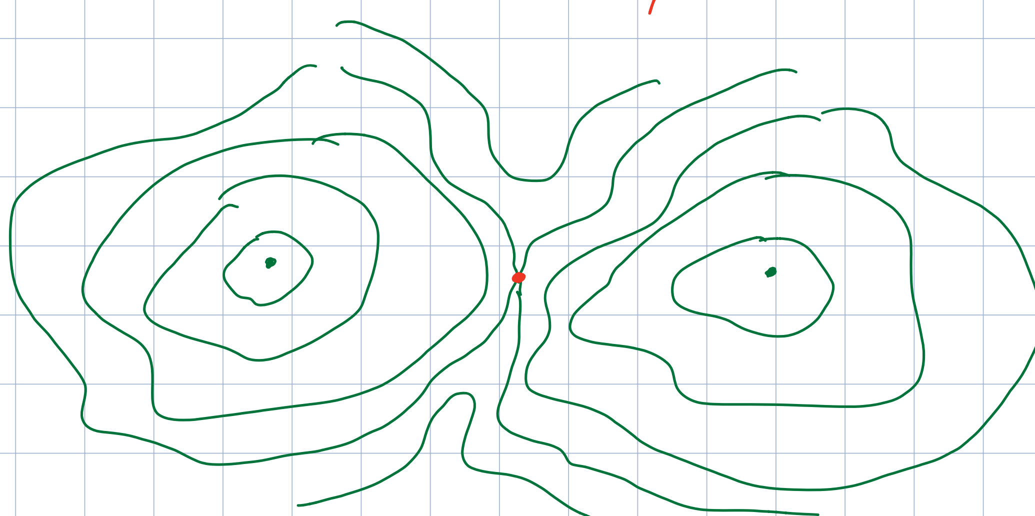


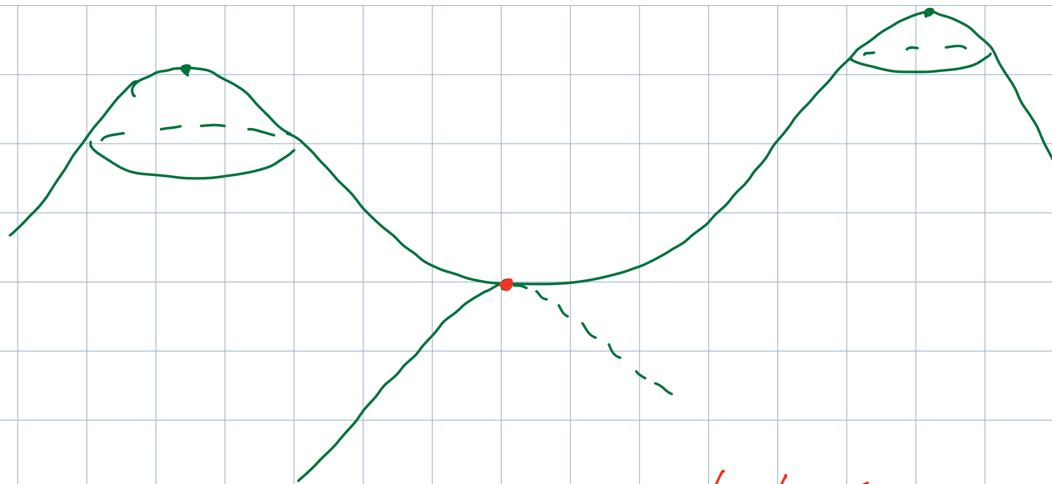




pto di min loc
$\Rightarrow$ grad $= 0$




pto di max
loc $\Rightarrow$ grad $= 0$





pto di sella
$z = x^2 - y^2$
$\text{grad} = (2x, -2y)$
nullo in $(0,0)$

Dim: curve : è loc. grafico.

$x \longmapsto (x, Y(x))$ $\qquad Y' = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ $\qquad \alpha(t) = (t, Y(t))$ $\qquad \boxed{\alpha'(t) = \left(1, -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)}$

$y \longmapsto (X(y), y)$ $\qquad X' = -\dfrac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}$ $\qquad \alpha(t) = (X(t), t)$ $\qquad \boxed{\alpha'(t) = \left(-\dfrac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}, 1\right)}$

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \perp \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

— o —