

Quesiti [35]

4) Dire per quali $K \in \mathbb{R}$ coincidono
i seguenti punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$\left[\overbrace{1+K} \ ; \ \underbrace{-2} \ ; \ K-1 \right] , \left[\overbrace{2} \ ; \ \underbrace{2-K} \ ; \ 4-K \right]$$

Primo controllo

$$\frac{-2}{1+K} = \frac{2-K}{2} \quad \Rightarrow \quad K \neq -1$$

$$-4 = (2-K)(1+K)$$

$$-4 = 2 + 2K - K - K^2$$

$$K^2 - K - 6 = 0$$

le soluzioni sono $K=3$ e $K=-2$

Secondo controllo

Controlli se per tali valori

$$\frac{K-1}{1+K} = \frac{4-K}{2}$$

per $K=3$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad OK$$

per $K=-2$

$$\frac{-3}{-1} = \frac{6}{2} \quad OK$$

dunque per $K=3$ e $K=-2$ i

punti coincidono

resta da controllare il caso $K=-1$

$$[0, -2, -2], [2, 3, 5]$$

sono diversi

5)

trovare il tipo affine della quadrica

$$3xy - yz + z^2 - 2x + 1 = 0$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Q

matrice 3×3

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = -\frac{9}{4}$$

$$d_3 = \det Q = -\frac{3}{2} \det \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

che segni hanno gli autovalori di Q ?

d_2 dice che gli autovalori di $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

sono discorsi

d_3 dice dunque che gli autovalori

$$\det A = -1 \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 d_3 =$$

$$= (-1)(-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + d_3$$

di Q hanno segni $++-$.

$$\det A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = -\frac{10}{4}$$

$\frac{d_4}{d_3}$ ha segno $+$

gli autovalori di A hanno segni.
 $++-+$

allora si tratta di un iperboloide
ellittico (a due fogli)

6) Due quadri punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
ha il sistema di $\mathbb{R}^2$ di equazione
 $(x^2 + 1 - y^2)(y - x + 7)(4x + 3y - 11) = 0$

eq omogenea

$$(x^2 + z^2 - y^2)(y - x + 7z)(4x + 3y - 11z) = 0$$

ponendo $z = 0$

$$(x^2 - y^2)(y - x)(4x + 3y) = 0$$

$$[1:1:0], [1:-1:0],$$

$$[3:-4:0]$$

Ricordati che $[3:-4:0] =$

$$= [1:-\frac{4}{3}:0] = [-\frac{3}{4}:1:0]$$

QUESITI 37

1) Data $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$

ortonormalizzare la base $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

di $\mathbb{C}^2$ rispetto al prodotto scalare
hermitiano $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ controllo se ha norma 1

$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{hermitiano standard}}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{herm standard.}}$$

$$= \overline{i} \cdot i + \overline{1} \cdot 0 = -i^2 = 1$$

dunque $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ va bene così dunque $v_1 = u_1$
 per trovare $u_2 = \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

sto applicando

$$v_2 \xrightarrow{\text{ha norma 1}} \left\langle v_2 \middle| \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A u_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{her. st.}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{her. st.}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (\bar{i} \cdot 0 + \bar{1} \cdot 1) \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

questo vettore non ha norma 1. Ha
norma $\sqrt{2}$, quindi prendo

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo della norma

$$\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{her standard}} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -1+3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{her st}}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{her st.}}$$

= 2 è il quoziente della somma.

2) Trovare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ e una base}$$

che la diagonalizzi

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+2 & -1 \\ -6 & t-3 \end{pmatrix} =$$

$$= t^2 - t - 12$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

gli autovalori
richiesti

Per la base calcolo gli autospazi
 V_4 e V_{-3}

$$\begin{aligned}
 V_4 &= \text{Ker} (4I - A) = \\
 &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{-3} &= \text{Ker} (-3I - A) = \\
 &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} = \\
 &= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

La base richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) $\mathbb{R}^2$ è identificato con
 $\{ [x: y: \underset{\uparrow}{z}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), z=1 \}$

quale luogo si ottiene intersecando
 $\mathbb{R}^2$ con $\{ \underline{\underline{[t^2: 1: t]}}, t \in \mathbb{R} \}$

mi interessa il caso con $t \neq 0$

allora

$$\underline{\underline{[t^2: 1: t]}} = [t^{\overset{x}{\downarrow}}: \overset{\textcircled{y}}{\downarrow} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}: 1]$$

$\uparrow$
 $\in \mathbb{R}^2$

sono in $\mathbb{R}^2$ i punti.

$xy = 1$ è una iperbole.

$$\frac{1}{t} = y$$

$$x = \frac{1}{y}$$

$$xy = 1$$
