

CURVA PARAMETRIZZATA

$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

α è regolare se le componenti $\alpha_i(t)$ sono derivabili con derivata continua e $\forall t \in [a, b] \quad \alpha'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Prop. 14.1.3

Sia $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare e sia $t_0 \in [a, b]$.

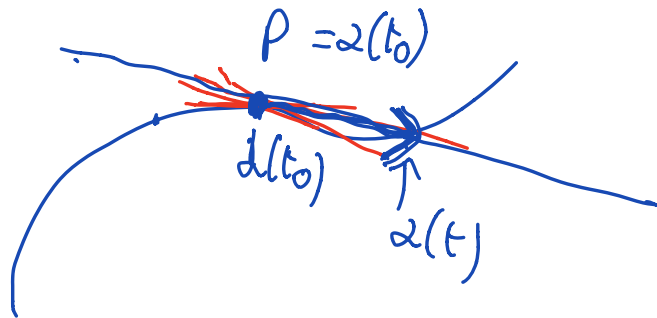
Per t che tende a t_0 l'unica retta di $\mathbb{R}^n$ passante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ tende alla retta

un punto della curva. $\rightarrow \underline{\alpha(t_0) + \text{span}(\alpha'(t_0))} \leftarrow$ tangente

detta retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$.

Inoltre tale retta è l'unica avente "contatto
duplice" con α in $\alpha(t_0)$.

Dim



La retta di $\mathbb{R}^n$ passante per $\alpha(t_0)$ e
 $\alpha(t)$ è

$$\alpha(t_0) + \text{span}(\alpha(t) - \alpha(t_0))$$

La giacitura di tale retta può scriverla anche

$$\text{span}\left(\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t}\right)$$

Passando al limite per $t \rightarrow t_0$

$$\frac{z(t) - z(t_0)}{t} = \begin{pmatrix} \frac{z_1(t) - z_1(t_0)}{t} \\ \vdots \\ \frac{z_n(t) - z_n(t_0)}{t} \end{pmatrix}$$

si ottiene.

$$\begin{pmatrix} z_1'(t_0) \\ \vdots \\ z_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

al limite dunque la retta che si ottiene è

$$z(t_0) + \text{Lyn} \left(z'(t_0) \right)$$

cominciamo per semplicità nel caso $n=2$.

Presa ora una retta r di equazione

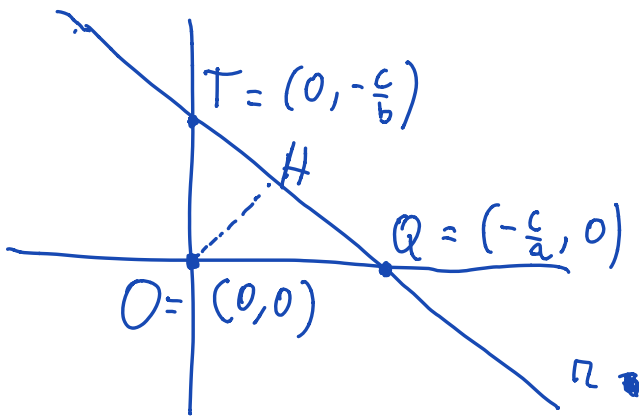
$$ax + by + c = 0$$

ri ricordando come si calcola la distanza di un punto $P = (X, Y)$ da r .

La formula è

$$d(P, r) = \frac{|aX + bY + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ricordiamo come si fa: per prima cosa
otteniamo il coseno
con $P = (0, 0)$



$$r \text{ è } ax + by + c = 0$$

Q si ottiene ponendo $y = 0$

$$ax + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{a} \quad \left(\text{se } a = 0 \right)$$

$$Q = \left(-\frac{c}{a}, 0 \right)$$

T si ottiene ponendo $x = 0$

$$by + c = 0$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

$$T = \left(0, -\frac{c}{b} \right)$$

L'area del triangolo è $\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{2}$

OQT

La lunghezza di TQ la calcolate con Pitagora

$$\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$$

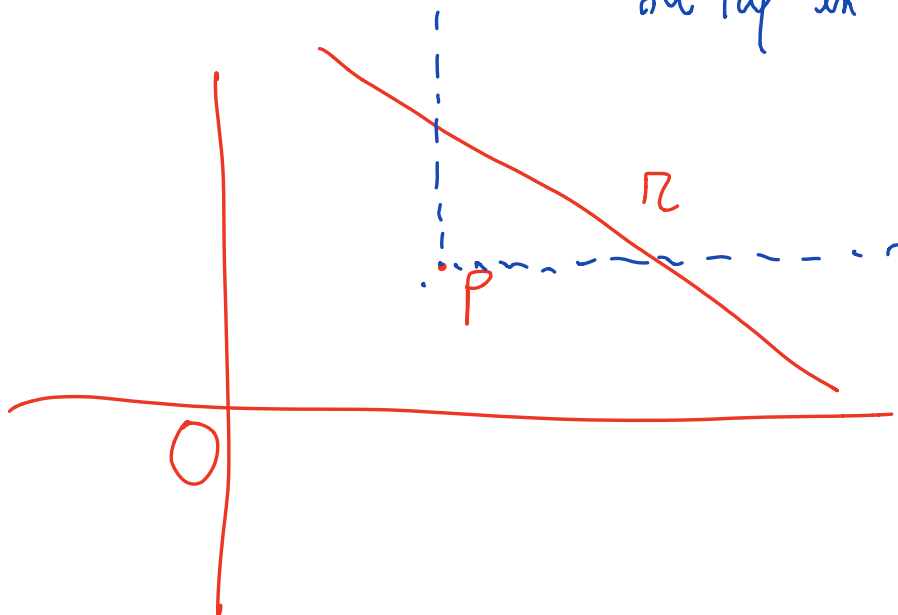
Infine

$$OH \cdot TQ \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{2}$$

$$OH = \frac{\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}}{TQ}$$

↑

La formula generale segue da un semplice
cambio di coordinate prendendo in un sistema
di ref in cui $P = (0,0)$



Nel nostro caso il punto $z(t)$ dista dalla retta. $ax + by + c = 0$

$$d(t) = \frac{|a z_1(t) + b z_2(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La richiesta del contatto duplice significa che in t_0 vogliamo

$$d(t_0) = d'(t_0) = 0$$

La condizione $d(t_0) = 0$ vincola $\underset{\uparrow}{c}$

La condizione $d'(t_0) = 0$

$$d(t) = \sqrt{(a z_1(t) + b z_2(t) + c)^2}$$

però sapere $a^2 + b^2 = 1$

perché $ax + by + c = 0$

$$\frac{a}{q}x + \frac{b}{q}y + \frac{c}{q} = 0$$

← è la stessa retta

$$d'(t) = \frac{a \alpha_1(t) + b \alpha_2(t) + c}{|a \alpha_1(t) + b \alpha_2(t) + c|} (a \alpha_1'(t) + b \alpha_2'(t))$$

[il caso in cui in un intorno di t_0 la curva sia un segmento si considera a parte ed è semplice]

↑
è ± 1
se $\alpha(t)$ non è nella retta.

l'unico modo perché $d'(t_0) = 0$ è che

$$a \alpha_1'(t_0) + b \alpha_2'(t_0) = 0$$

dunque la retta in questione ha una giacitura che è proprio

$$\text{span} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t_0) \\ \alpha_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

□

E 14.1.1

Stabilire se la curva $\alpha(t): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ per } t \in [-1, 0) \\ \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ t^2 \end{pmatrix} \text{ per } t \in [0, 1] \end{array} \right.$$

$\alpha(t)$ è continua perché in 0

Studiamo $\alpha'(t)$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \cos t \end{pmatrix} & \text{per } t \in [-1, 0) \\ \alpha'(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2t \end{pmatrix} & \text{per } [0, 1] \end{cases}$$

$$\alpha'_-(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'_+(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque α' non è definita in 0.

Cambiamento di parametro.

Def Siano $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e
 $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curve regolari.

Diciamo che α è ottenuta da β tramite
un cambiamento di parametro se esiste una
funzione $\tau: [c, d] \rightarrow [a, b]$

BIGETTIVA, DERIVABILE e con
 τ^{-1} DERIVABILE vale che

$$\underline{\underline{\beta(s) = \alpha(\tau(s)) \quad \forall s \in [c, d]}}$$

Vale che α e β hanno la stessa immagine
che è la curva come luogo nello spazio,
e si chiama SUPPORTO.

Vale che

$$\alpha(\gamma) = \beta(\tau^{-1}(\gamma))$$

Ci sono due casi

$$\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

1) τ crescente, allora $\tau(c) = a$
 $\tau(d) = b$

2) τ decrescente allora $\tau(c) = b$
 $\tau(d) = a$

Nel caso 1) si dice che τ conserva l'orientazione, nel caso 2) τ inverte l'orientazione.

§ 14.1.2

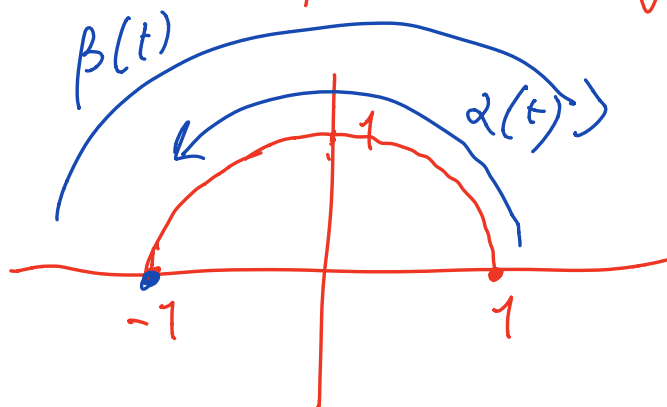
$$\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\beta: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$$

Il supporto in entrambi i casi è la semicirconferenza superiore di raggio 1



$$\tau: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$s \rightarrow \frac{\arccos s}{\pi}$$

$$\beta(s) = 2(\tau(s))$$

$$\begin{pmatrix} s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi \tau(s) \\ \sin \pi \tau(s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \pi \frac{\arccos s}{\pi} \\ \sin \pi \frac{\arccos s}{\pi} \end{pmatrix}$$

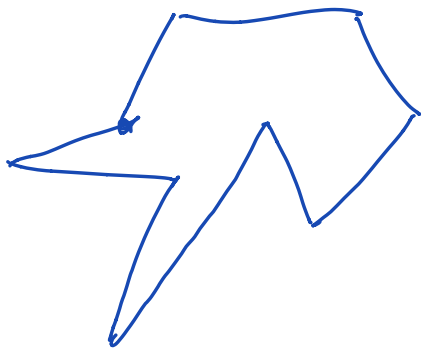
$$\begin{pmatrix} \cos \arccos S \\ \sin \arccos S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S \\ \sqrt{1-S^2} \end{pmatrix}$$

τ mantiene l'orientazione? NO, la
inverte, è decreciente.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Le una curva fosse una spezzata



la lunghezza sarebbe la somma delle lunghezze dei segmenti

Data una curva ^{regolare} $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

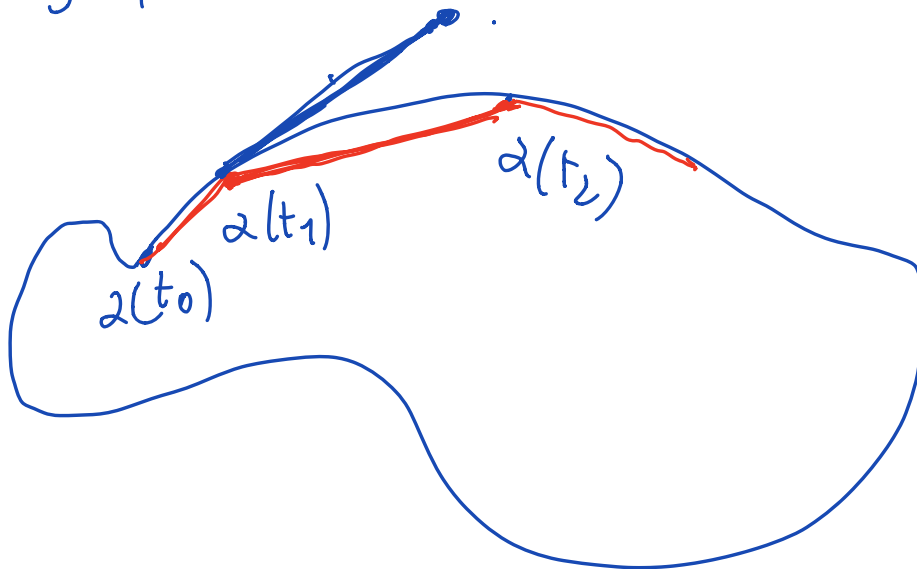
suddividiamo $[a, b]$ in

$$\left[\overset{t_0}{a}, t_1 \right], [t_1, t_2], \quad , \quad [t_{m-1}, \overset{t_m}{b}]$$

La spezzata di vertici $\alpha(a), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_{m-1}), \alpha(b)$ "approssima" la curva tanto meglio quanto più è fatta la suddivisione.

Tale spezzata ha lunghezza

$$\sum_{j=1}^n \left\| \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \right\|$$



Se la suddivisione è "fitta",

$\alpha(t_j)$ è approssimato da ^{"bene"}

$$\alpha(t_{j-1}) + (t_j - t_{j-1}) \alpha'(t_{j-1})$$

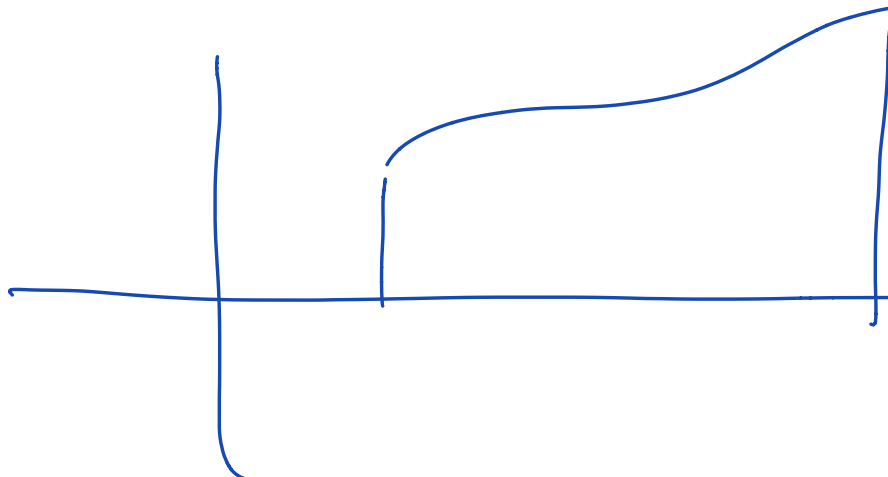
La lunghezza della curva è allora

approssimata da

$$\sum_{j=1}^N \left\| \cancel{2(t_{j-1})} + (t_j - t_{j-1}) 2'(t_{j-1}) - \cancel{2(t_{j-1})} \right\|$$

$$= \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) \left\| 2'(t_{j-1}) \right\|$$

Ricordiamo che $2'(t)$ è continua e
dunque $\|2'(t)\|$ è integrabile.



Al tendere di N a $+\infty$ e della
lunghezza degli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ a 0
si ottiene.

$$\int_a^b ||\alpha'(t)|| dt.$$

Def L'integrale sopra è dell'
lunghezza della curva regolare α .
e si scrive $L(\alpha)$.

Esempio Prende la circonferenza parametrizzata
da

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z(\vartheta) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Also

$$z'(\vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} \|z'(\vartheta)\| \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} r \, d\vartheta = 2\pi r$$

con le parametrizzazioni

$$\beta^+: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\beta^+(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix}$$

$$\beta^-: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\beta^-(x) = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix}$$

riuscì a descrivere le due semicirconferenze
e si verificò che

$$L(\beta^+) + L(\beta^-) = L(\alpha)$$

come volevamo.

Prop 14.1.8.

Se β è ottenuta da α tramite un
cambiamento di parametro allora

$$L(\beta) = L(\alpha)$$

Dim

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds =$$

poiché

$$\beta(s) = \alpha(\tau(s)) \quad \text{con}$$

τ cambiamento di parametro.

Vale

$$\underbrace{\beta'(s)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\alpha'(\tau(s))}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\tau'(s)}_{\in \mathbb{R}}$$

Per cui passando alle norme

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\tau(s))\| \cdot |\tau'(s)|$$

allora

$$L(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\tau(s))\| |\tau'(s)| ds$$

$$= \int_a^b \| \alpha'(t) \| dt = L(\alpha).$$

Esercizi di riepilo

Questi 35

1) Calcolare l'angolo formato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per farsi: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

Calcolare l'angolo significa ricordarsi che

$$\cos \vartheta = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \right\|} \quad \begin{matrix} \text{red arrow} \rightarrow 7 \\ \text{red arrow} \rightarrow 7 \end{matrix}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+1+4}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

2) Per quali $K \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3+K^3 & 2-K \\ 1+2K & -7 \end{pmatrix} \quad \text{ammette una base}$$

ortogonale di autovettori?

Per farsi: se A è simmetrica certamente ammette tale base per il teorema Spettrale.

Viceversa, se ammette una tale base e

M è la matrice di cambiamento di base. (con ${}^t M = M^{-1}$).

Allora $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Ma allora

$$A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^t M$$

e dunque ~~A~~ deve essere simmetrica

$$\begin{aligned} {}^t \left(M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^t M \right) &= {}^t {}^t M {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^t M \\ &= M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^t M \end{aligned}$$

La condizione che cerchiamo è dunque.

// A simmetrica //

Però dunque imponiamo

$$2 - K = 1 + 2K$$

$$3K = 1$$

$$K = \frac{1}{3}$$

3) Se $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ è

$$A^* = -A \quad \text{è vero che } \det A = 0?$$

NO, infatti:

$$\overline{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bullet$$

Première

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$\text{e } \det A = i$$