Geometria 22/4/2020

Quadriche : modelli affini delle quadriche non degeneri

$\emptyset$, ellissoide, iperb. iperb., iperb. ell, parab. iperb., parab. ell.

$\mathcal{Q} = \{x\in\mathbb{R}^3 : {}^t\binom{x}{1} \cdot A \cdot \binom{x}{1} = 0\}$ $\quad A \in M_{4\times 4}$ simm, det $\neq 0$.

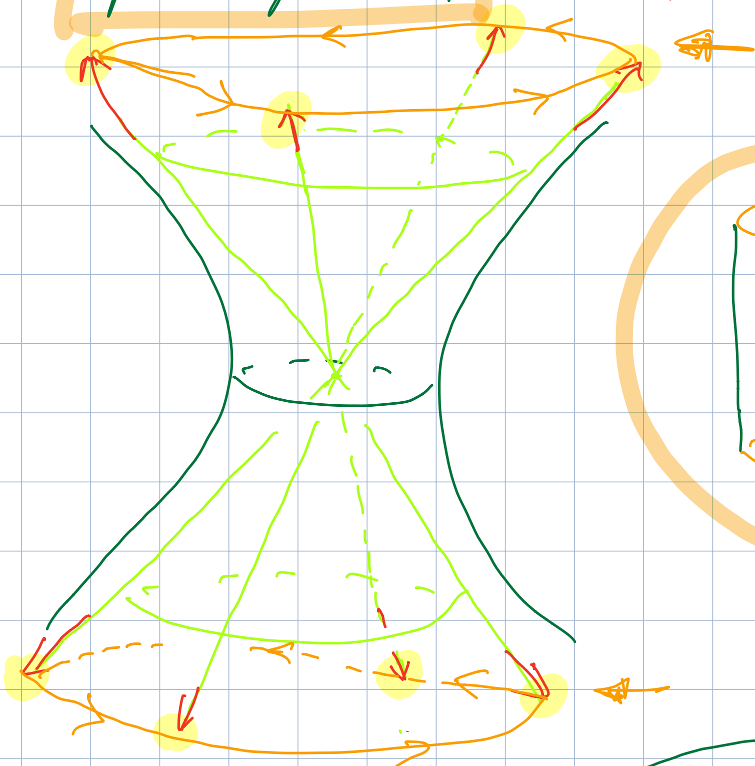
Quadriche proiettive non deg: $\quad$ (in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)

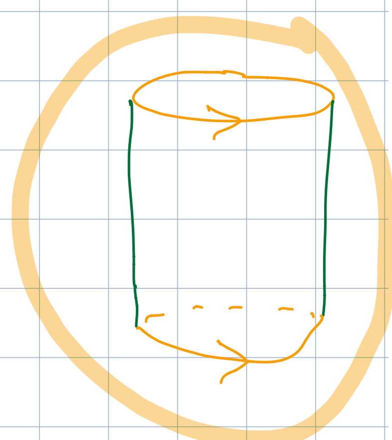
$x^2+y^2+z^2+w^2=0 \qquad \emptyset$

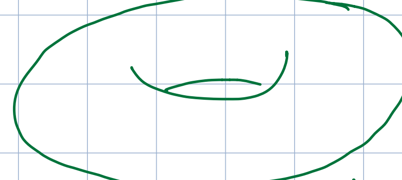
$x^2+y^2+z^2=w^2 \qquad \cap\ \mathbb{R}^3=\{w=1\}$ ellissoide proiettivo

$\underbrace{x^2+y^2=z^2+w^2} \qquad \cap\ \{w=1\} \ : \ \underbrace{x^2+y^2=z^2+1}_{\text{iperb. a 1 falda}}$

iperboloide proiettivo.







toro

$\mathcal{L} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{L}}$ $\qquad$ $\mathcal{L}_\infty = \overline{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$

completamento $\quad$ parte a ∞

$\emptyset \quad x^2+y^2+z^2+1=0 \rightsquigarrow x^2+y^2+z^2+w^2=0 \quad \emptyset$

ellissoide $\quad x^2+y^2+z^2=1 \rightsquigarrow x^2+y^2+z^2=w^2$ $\quad \overline{\mathcal{L}}$ = ellissoide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty : x^2+y^2+z^2=0 \quad \emptyset$

iperb. 1 falda iperbolico

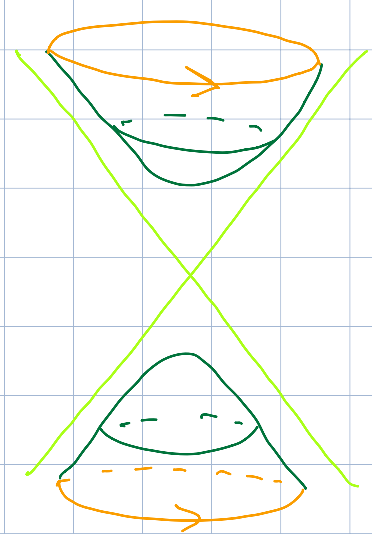
$x^2+y^2=z^2+1 \rightsquigarrow x^2+y^2=z^2+w^2$ $\quad \overline{\mathcal{L}}$ iperboloide proiettivo

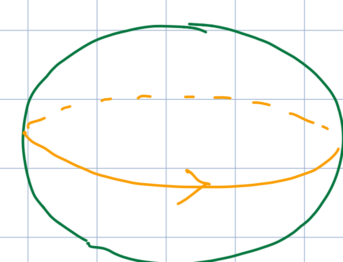
$\mathcal{L}_\infty : x^2+y^2=z^2$ unica conica non deg. (circonferenza)

iperb. 2 falde ellittico

$x^2+y^2+1=z^2 \qquad x^2+y^2+w^2=z^2$ $\quad \overline{\mathcal{L}}$ ellissoide proiettivo

$\mathcal{L}_\infty : x^2+y^2=z^2$ circonf.





$\overline{\mathcal{L}}$ = ellissoide

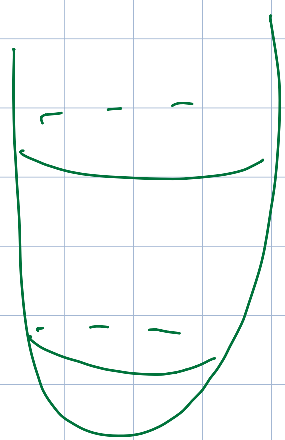
parab. ellittico

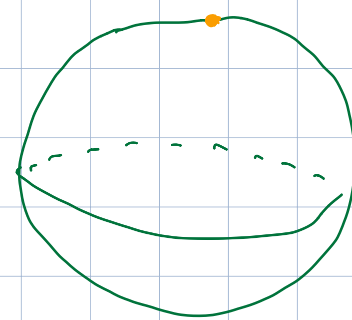
$$z = x^2+y^2 \rightsquigarrow zw = x^2+y^2 \qquad \begin{cases} z = u+v \\ w = u-v \end{cases} \qquad u^2-v^2 = x^2+y^2$$

$$\bar{Z}: \quad x^2+y^2+v^2 = u^2$$

ellissoide proiettivo

$Z_\infty: \; x^2+y^2=0$ 1 pto: $[0:0:1]$





$\bar{Z}$ = ellissoide

parab. iperbolico

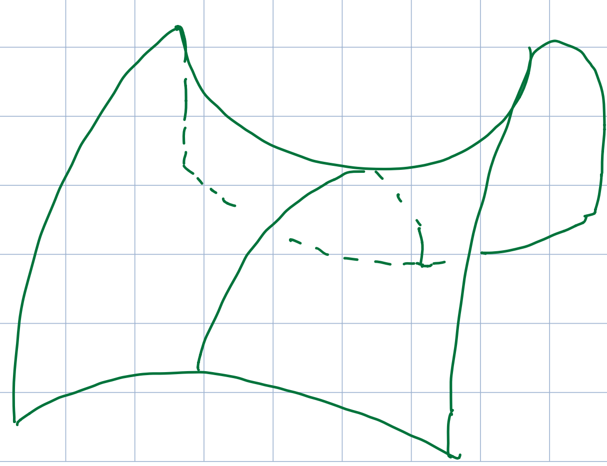
$$z = x^2-y^2 \rightsquigarrow zw = x^2-y^2 \qquad \begin{cases} z = u+v \\ w = u-v \end{cases} \qquad u^2-v^2 = x^2-y^2$$

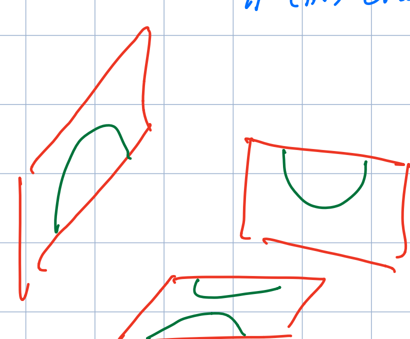
$x^2+v^2 = y^2+u^2$ iperboloide proiettivo

$Z_\infty: \; x^2-y^2=0 \quad x = \pm y$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

due rette che si intersecano in un punto

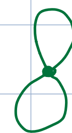
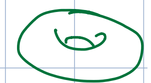
(retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $= \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ circonf.)



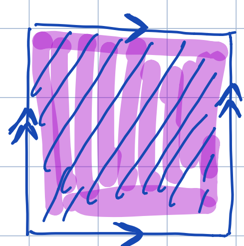
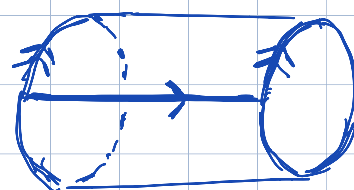


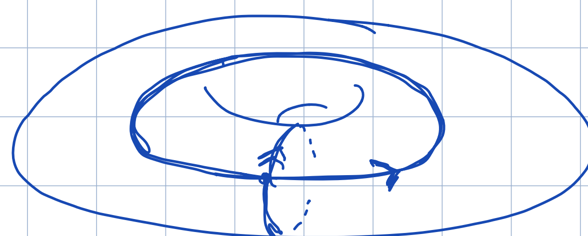
$z = x^2 - y^2$

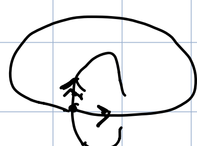
proiettando su $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ho bijezione

$\Rightarrow$ $\exists$ modo per aggiungere  a $\mathbb{R}^2$ per ottenere 

$\Rightarrow$ $\exists$  $\subset$  il cui complem. è $\mathbb{R}^2$

 = 

= 

toro $\setminus$  = quadrato $\setminus$ bordo = $\mathbb{R}^2$.

Classificazione affine delle quadriche non degeneri

Teo: se $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ A simm $\det \neq 0$

allora esiste $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + v$

t.c. $\varphi(\mathcal{L})$ è una delle 6 elencate sopra.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Att: dire che $\mathcal{L}: 3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2xy - 7xz + 11yz + 4x - 5y + 6z - \sqrt{3} = 0$

«è un iperboloide iperbolico»

significa: $\exists\, \varphi$ t.c. $\varphi(\mathcal{L}): X^2 + Y^2 = Z^2 + 1$

φ = trasf. affine.

Dimo: $A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix}$; azioni lecite:

- $A \rightsquigarrow {}^tN \cdot A \cdot N \qquad N = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $Q \rightsquigarrow {}^tM \cdot Q \cdot M$

- $A \rightsquigarrow k \cdot A$

  $Q \rightsquigarrow k \cdot Q$

Oss 1: con tali operazioni i segni degli autovalori di Q e A non cambiano oppure cambiano tutti insieme.

Oss 2: Q non può avere rango ≤ 1 ; altrimenti:

$$A \underset{\text{teo spettrale}}{\rightsquigarrow} \underbrace{{}^t\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \vdots \\ & 0 & & \vdots \\ & & \lambda_3 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \end{pmatrix}}_{\substack{\det = 0 \\ C_I,\, C_{II} \text{ lin. dip.}}}$$

Passi per ricondursi ai modelli:

- Con teo spettrale $\rightsquigarrow Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

- Con riordino e omotetie

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & 0/\pm 1 \end{pmatrix}$$

- Con riordino e cambio segno di tutto

$$Q \rightsquigarrow \underset{1}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \underset{2}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}} \underset{3}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \underset{4}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}$$

- Con traslazione + dividere equaz. + omotetie

A : 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2+z^2+1=0$ $\emptyset$ $\qquad$ $x^2+y^2+z^2=1$ ellissoide

2

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2=z^2-1$ iperb. 2 falde $\qquad$ $x^2+y^2=z^2+1$ iperb. 1 falda

3

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & 0 \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$z=x^2+y^2$ parab. ell. $\qquad$ $z=x^2-y^2$ parab. iperb. $\blacksquare$

Data equazione $\rightsquigarrow$ $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$: come decidere
"che quadrica è"

"Usare i d_1, d_2, d_3, d_4 per capire come sono i segni degli autovalori di Q e A"

$\emptyset$: $(+++)+$ ellissoide : $(+++)-$
iperb. ell : $(++-)+$ iperb. iperb : $(++-)-$
parab. ell : $(++0)$ parab. iperb : $(+-0)$
$[A: +++-]$ $[A: +-+-]$

$\underline{\underline{\text{se}}}$ $\det(A) \neq 0$

Come procedere se $d_2 \neq 0$: $\boxed{e\ d_4 \neq 0}$

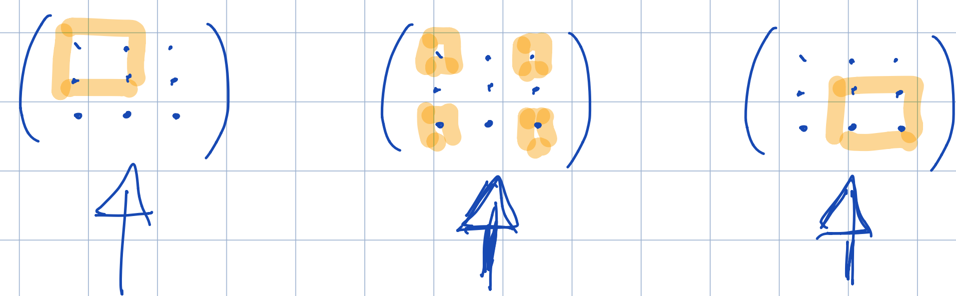
$d_2 > 0$; suppongo $Q: ++\ldots$
(altrimenti cambio segno)
$\begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$ det > 0
$\begin{pmatrix} - & \\ & - \end{pmatrix}$ det > 0

- $d_3 > 0$ $\begin{cases} d_4 > 0 & (+++)+ \quad \emptyset \\ d_4 < 0 & (+++)- \quad \text{ellissoide} \end{cases}$
- $d_3 < 0$ $\begin{cases} d_4 > 0 & (++-)- \quad \text{iperb. 1 falda} \\ d_4 < 0 & (++-)+ \quad \text{iperb. 2 falde} \end{cases}$
- $d_3 = 0 \longrightarrow$ parab. ell.

$d_2 < 0$; suppongo $Q: +-\ldots$

- $d_3 > 0$ $\begin{cases} d_4 > 0 & (+--)+ = (++-)- \\ d_4 < 0 & (+--)- = (++-)+ \end{cases}$
- $d_3 < 0$ $\begin{cases} d_4 > 0 & (+-+)- = (++-)- \\ d_4 < 0 & (+-+)+ = (++-)+ \end{cases}$
- $d_3 = 0 \longrightarrow$ parab. iperb.

A meno di riordinare le coordinate come d_2 posso usare:



Se uno è $\neq 0$ ... come sopra (d_3 d_4 ok).

Se tutti $=0$ caso particolarissimo

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = 0 \qquad ab = c^2 \Rightarrow a, b \geq 0 \qquad c = \pm\sqrt{ab}$$

Se tutti i $d_2 = 0$:

$$Q = \begin{pmatrix} a & x\sqrt{ab} & y\sqrt{ac} \\ x\sqrt{ab} & b & z\sqrt{bc} \\ y\sqrt{ac} & z\sqrt{bc} & c \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x, y, z = \pm 1 \\ a, b, c \geq 0 \end{matrix}$$

$a = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(Q) \leq 1$ $\underline{\text{No}}$

$$x \cdot y \cdot z = 1 \Rightarrow z = x \cdot y \Rightarrow \begin{matrix} C_{II} = x \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot C_I \\ C_{III} = y \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \cdot C_I \end{matrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(Q) \leq 1$ $\underline{\text{No}}$

$x \cdot y \cdot z = -1$

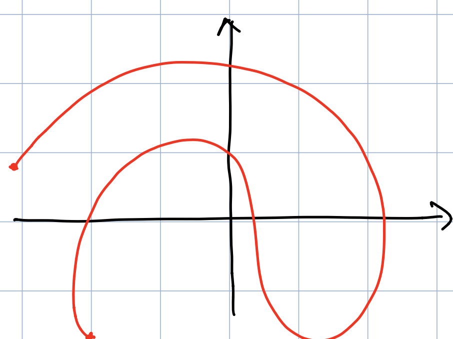
$$\det(Q) = \det\begin{pmatrix} a & x\sqrt{ab} & y\sqrt{ac} \\ x\sqrt{ab} & b & z\sqrt{bc} \\ y\sqrt{ac} & z\sqrt{bc} & c \end{pmatrix} = \begin{matrix} abc & -abc \\ -abc & -abc \\ -abc & -abc \end{matrix}$$

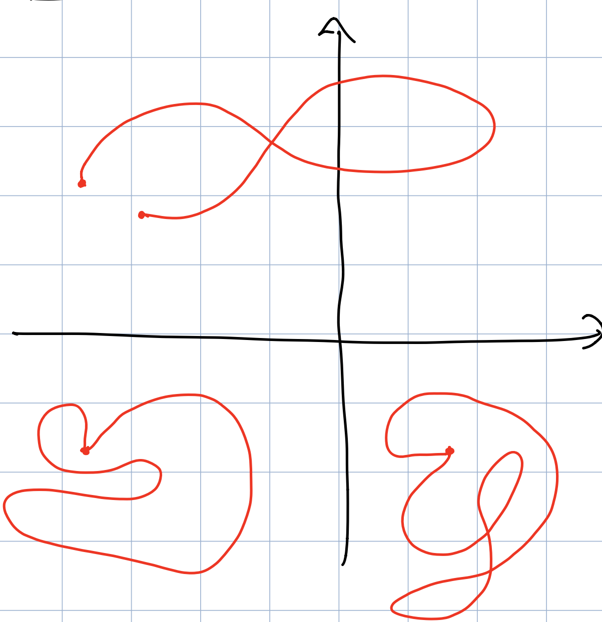
$$= -4abc < 0.$$

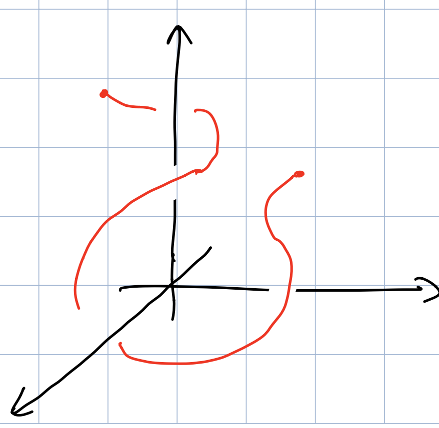
$d_1 > 0 \quad d_3 < 0 \Rightarrow (+ + -)$ $\begin{cases} d_4 > 0 & (++-)- \\ d_4 < 0 & (++-)+ \end{cases}$

$\blacksquare$

Curve nel piano e nello spazio

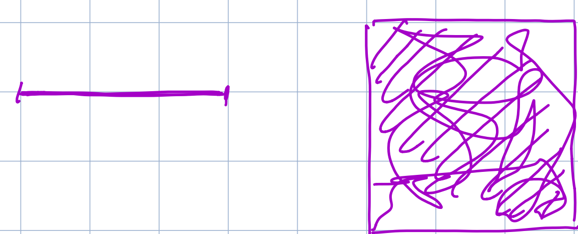




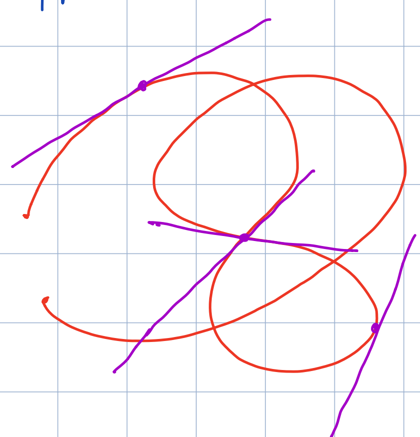


Def: chiamo curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; chiamo supporto di α la sua immagine. (α almeno continua)

Oss: chiedendo solo continua possono accadere fatti anti-intuitivi: es: esiste $\alpha : [0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ continua suriettiva



Supporremo sempre α almeno C^1 (componenti derivabili con derivata prima cont.)



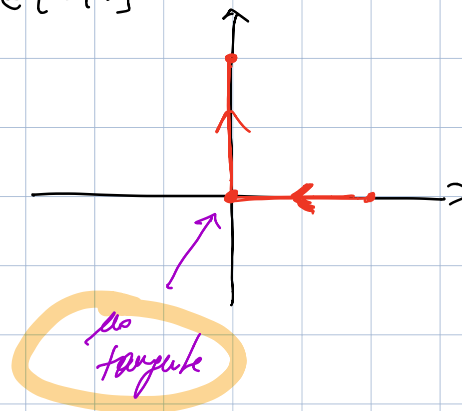
Anzi per garantire che esista sempre una retta tangente si richiede $\underbrace{\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t}_{\alpha \text{ regolare}}$.

Non basta $\exists \alpha'$ per avere tangente:

Es(1) : $\alpha(t) = \begin{cases} (t^2, 0) & t \in [-1, 0] \\ (0, t^2) & t \in [0, 1] \end{cases}$ $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha'(t) = \begin{cases} (2t, 0) & t \in [-1, 0] \\ (0, 2t) & t \in [0, 1] \end{cases}$

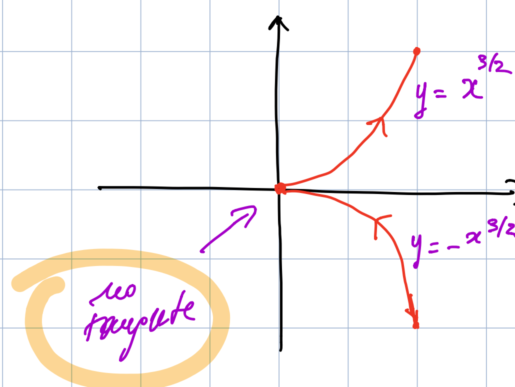
$\boxed{\alpha'(0) = (0,0)}$



Es(2) : $\alpha(t) = (t^2, t^3)$
$t \in [-1, 1]$

α è C^∞

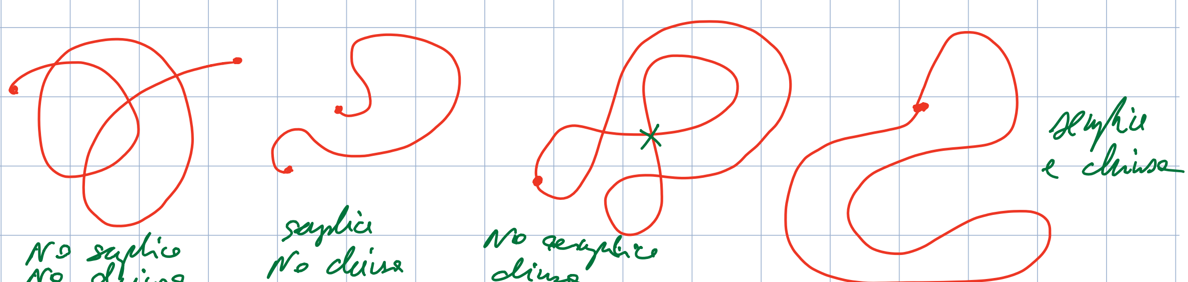
$\boxed{\alpha'(0) = (0,0)}$



———o———

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva continua è detta

- semplice se è iniettiva
- chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$
- semplice e chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$ ed è iniettiva in $[a, b)$



Curiosità: visto che α continua può essere brutta.

Fatto: (Jordan-Schönflies)

Se α è una curva semplice e chiusa continua allora $\mathrm{Im}(\alpha)$ separa $\mathbb{R}^2$ in due regioni, di cui essa è il bordo:

una limitata e una no