Lemma 13.2.2.

Data $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con A simmetrica e B invertibile, i segni degli autovalori di

$$ {}^tB\, A\, B $$

contati con molteplicità coincidano con i segni degli autovalori di A

Dim Premessa (1)

A e ${}^tB\, A\, B$ sono simmetriche dunque sappiamo che hanno autovalori reali

(2) Sappiamo che il numero di autovalori positivi di A coincide

con la massima dimensione possibile di un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\langle \, | \, \rangle_A$ è definito positivo su W.

TROVATE UNA DIM IN FONDO ALLE SLIDES.

Prendendo per buono ② la dimostrazione finisce così:

$$\langle w \mid w \rangle_{{}^tBAB} = \langle Bw \mid Bw \rangle_A$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$${}^tw \, {}^tBAB \, w \qquad\qquad {}^t(Bw) A B w = {}^tw \, {}^tB A B w$$

allora la dimensione massima di un s. spazio su cui $\langle \ | \ \rangle_{{}^tBAB}$ è def positivo coincide con la dim massima di un s. spazio su cui $\langle \ | \ \rangle_A$ è def pos.

(se S è un tale sottospazio per $\langle \ | \ \rangle_{{}^tBAB}$ allora $B(S)$ lo è per $\langle \ | \ \rangle_A$)

B è invertibile dunque

$$\dim B(S) = \dim S$$

Dunque tale dimensione è uguale per la

(2) sia al numero di autovalori positivi di A sia al numero di autovalori positivi di ${}^tB\,A\,B$

Si procede analogamente per gli autovalori positivi e per quelli $= 0$. $\square$

Teorema 13.2.3

l'enunciato è già noto, è la classificazione delle coniche non degeneri

Dim. Sia A la matrice della conica. (Vale $\det A \neq 0$ perché siamo nel caso "non degenere")

$$A = \left(\begin{array}{c|c} Q & \ell \\ \hline {}^t\ell & c \end{array}\right)$$

dove Q è simmetrica 2×2

① Dire $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$

equivale a dire che gli autovalori di

A sono concordi

infatti

se $d_1 < 0$ allora $\frac{d_1}{d_0}$ è < 0

$d_2 > 0$ $\to \frac{d_2}{d_1}$ è < 0

ha lo stesso segno di d_1 $\to$ $\frac{d_3}{d_2}$ è < 0

è $> 0 \to$

se $d_1 > 0$ allora i tre segni
vengono positivi.

Analogamente si nota che

(2) $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$

equivale a dire che gli autovalori
di Q sono concordi ma quelli
di A no.

(3) $d_2 < 0$ equivale a dire che
gli autovalori di Q sono
discordi

(4) $d_2 = 0$
Q ha almeno un autovalore nullo.

Ora applichiamo alla conica un cambiamento di coordinate affine.

$$M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ v è 2×1

con $\det B \neq 0$

La conica cambia coordinate e la nuova matrice è

$${}^t M \; A \; M =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t B Q B & {}^t B (Q v + \ell) \\ \begin{array}{c} {}^t v Q + {}^t \ell \\ 1 \end{array} & \langle v | v \rangle_Q + 2 \langle v | \ell \rangle + c \end{pmatrix}$$

noto che il d_3 di ${}^tMAM$
ha lo stesso segno di d_3 di A
per il teorema di Binet

$$\det({}^tMAM) = (\det A) \cdot (\det M)^2$$

Per il Lemma 13.2.2 applicato a
${}^tBQB$ vedo che

${}^tMAM$ risponde identicamente
alla matrice A alle domande
1, 2, 3, 4 ecc.

"gli autovalori sono concordi?"

"gli autovalori della parte

sono concordi fra loro ma non lo sono quelli della matrice grande"?

Applicando una affinità opportuna ed eventualmente cambiando segno, posso portare Q ad essere della forma

① $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

④ $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notate che non potevo avere

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

perché in tal caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

e A non potrebbe avere rango 3

ossia $\det A = 0$ e siamo invece nel caso $\det A \neq 0$.

Nei casi 1, 2, 3, scegliendo opportunamente v posso far sì che

perchè Q è invertibile in questi casi

$$Qv + l = 0$$ e allora

trans

1 $\quad x^2 + y^2 + 1 = 0$ $\quad$ tre autovalori concordi

$=$

2 $\quad x^2 + y^2 - 1 = 0$ $\quad$ l'ultimo autovalore è discorde

$=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

3 $\quad x^2 - y^2 - 1 = 0$

Nel caso 4 $\qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scegliendo bene v posso ridurmi a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & K & c \end{pmatrix}$$

Infatti

$$Qv = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

e allora posso ottenere:

$$Qv + l = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$$

Con l'ulteriore cambiamento di coordinate

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2k} & -\frac{c}{2k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si trova

$$y = x^2$$

$\square$

Paragrafo 13.3

Modelli affini delle quadriche.

Def 13.3.1

Una quadrica non degenere è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da una eq. polinomiale di secondo grado a cui è associata una matrice $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ simmetrica con $\det A \neq 0$.

Esempio

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 8x + 16z + 5 = 0$$

ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Esempi

- $x^2+y^2+z^2+1=0$ l'insieme vuoto.

- $x^2+y^2+z^2=1$ ellissoide

- $\underbrace{x^2+y^2}=z$ paraboloide ellittico.

- $x^2+y^2=z^2-1$ iperboloide ellittico o "a due falde"
- $x^2+y^2=z^2+1$ " iperbolico o "a una falda"

- $z=x^2-y^2$ paraboloide iperbolico o "a sella"

- Ellissoide
- Iperboloide a una falda
- Iperboloide a due falde
- Paraboloide ellittico
- Paraboloide iperbolico
- Quadriche rigate
- Coni quadrici
- Cilindri quadrici
- Quadriche formate da due piani
- Piani doppi

Rappresentazione delle quadriche

Ellissoide

Superficie data dall'equazione ridotta $Q : \boxed{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0}$

dove a_1, a_2, a_3 sono > 0. Sappiamo che è dotata di un unico centro O di simmetria, in questo caso $O = (0,0,0)$, quindi se $P = (x, y, z) \in Q$ allora il simmetrico rispetto a O cioè $P' = (-x, -y, -z)$ sta su Q.

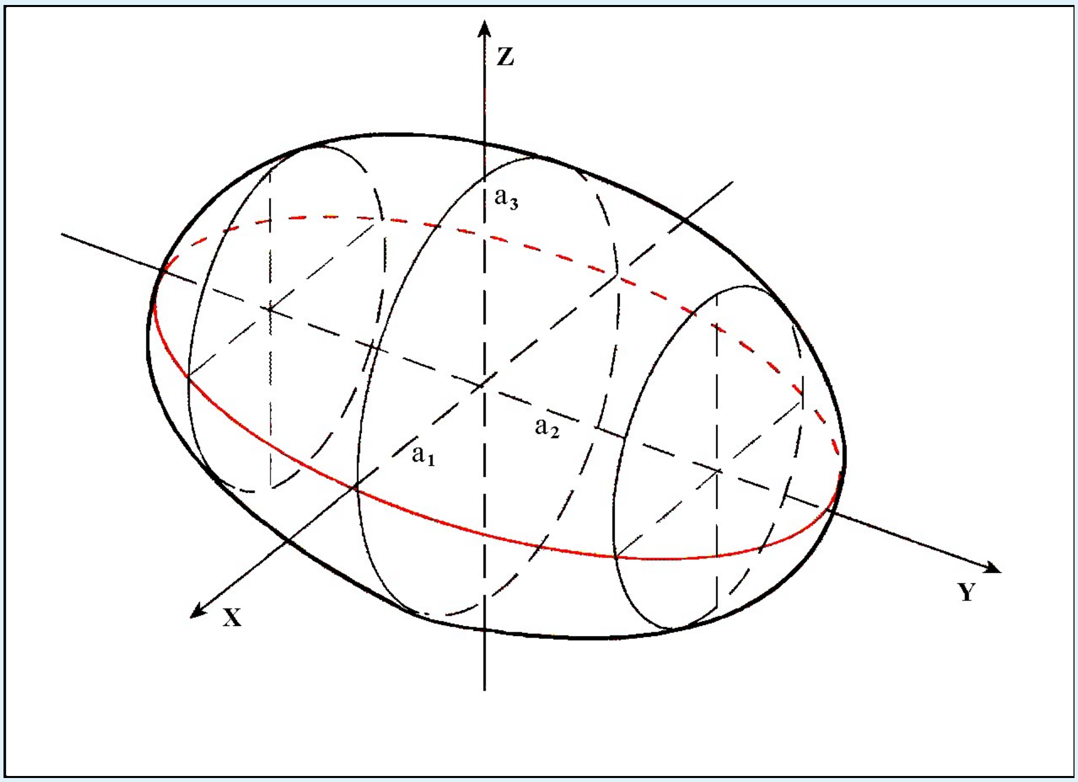
Osserviamo che se $P = (x, y, z) \in Q$ anche $P' = (-x, -y, z)$ sta su Q. Ciò vuol dire che se P sta su Q anche il simmetrico di P rispetto all'asse z sta su Q. Quindi l'asse z è asse di simmetria per Q.
In modo analogo si vede che anche gli altri assi coordinati sono assi di simmetria.

Se $P = (x, y, z) \in Q$ si vede che anche $P' = (-x, y, z)$ sta su Q. Ciò vuol dire che se P sta su Q anche il simmetrico di P rispetto al piano $x = 0$ sta su Q. Allora il piano $x = 0$ risulta essere un piano di simmetria per Q.
Analogamente si vede che anche gli altri piani coordinati sono piani di simmetria e non ce ne sono altri se a_1, a_2, a_3 sono tutti diversi.

Se intersechiamo l'ellissoide con il piano $z = h$ otteniamo

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 - \frac{h^2}{a_3^2}.$$

Si tratta di una ellisse (a punti reali) se $(h^2/a_3^2) < 1$, ossia $-a_3 < h < a_3$, di un solo punto reale se $h = \pm a_3$. L'intersezione non contiene punti reali se $|h| > a_3$. In particolare Q è tutta compresa tra i due piani di equazione $z = \pm h$. In modo analogo si ragiona per piani del tipo $x = h, \ y = h$. I numeri a_1, a_2, a_3 si chiamano ***semiassi*** dell'ellissoide Q. Da tutte queste considerazioni possiamo avere un'idea della forma di Q.



Ellissoide di rotazione

Se due dei semiassi sono uguali, Q è una superficie di rotazione attorno a uno degli assi. Ad esempio se $a_1 = a_2$ l'equazione di Q diventa:

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0.$$

quindi Q si ottiene ruotando l'ellisse

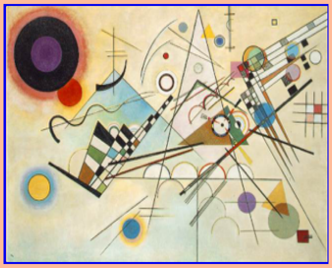
$$\gamma : \begin{cases} \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

attorno all'asse z. Se i tre semiassi sono uguali, $\mathcal{Q}$ è una superficie sferica di centro O.

Nella classificazione euclidea abbiamo trovato un'equazione del tipo

$$\mathcal{Q} : \ -\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} + 1 = 0.$$

Si vede subito che non esistono punti reali che soddisfano l'equazione di $\mathcal{Q}$. Da qui il nome ***Ellissoide immaginario.***



[Ellissoide]

[Iperboloide a una falda]

[Iperboloide a due falde]

[Paraboloide ellittico]

[Paraboloide iperbolico]

[Quadriche rigate]

[Coni quadrici]

[Cilindri quadrici]

[Quadriche formate da due piani]

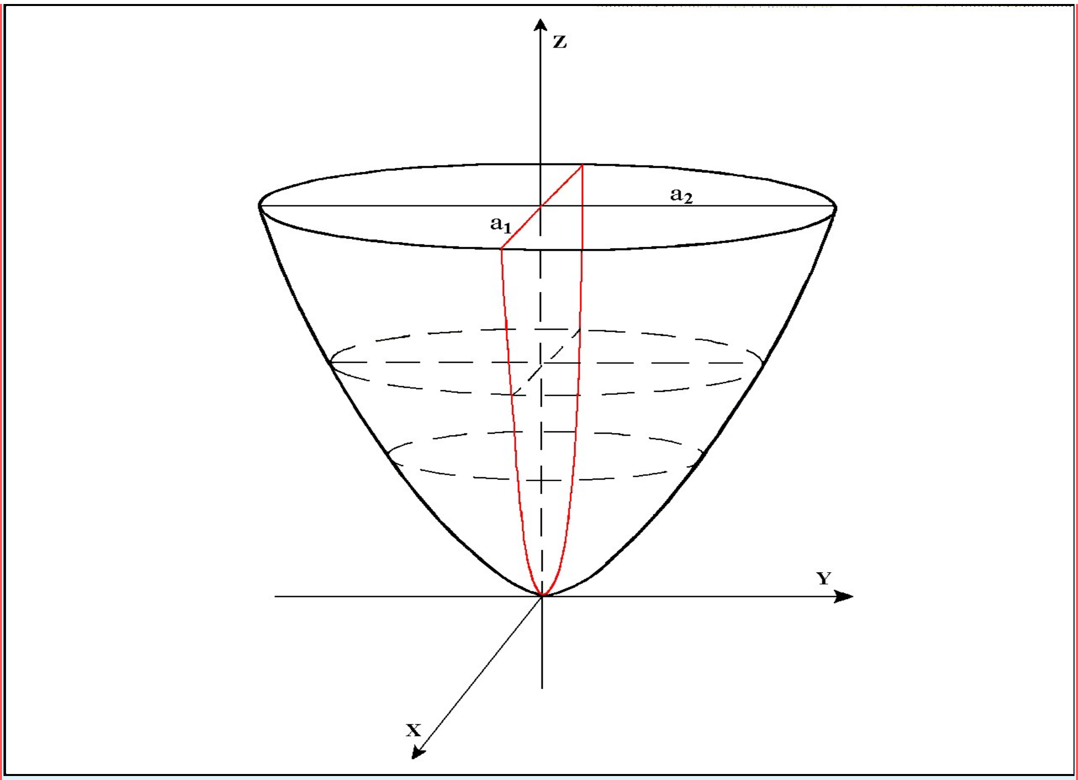
[Piani doppi]

Rappresentazione delle quadriche

Paraboloide ellittico

Superficie data dall'equazione ridotta $Q:\ \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}-2z=0$ dove a_1, a_2 sono >0. Sappiamo già che non esiste un centro di simmetria ed è immediato verificare che solo l'asse z è asse di simmetria. I piani di simmetria sono $x=0$ e $y=0$; non ce ne sono altri se $a_1 \neq a_2$. L'intersezione di Q con i piani $x=h$ sono parabole con asse parallelo all'asse z e vertice sulla parabola $\gamma:\ y=0, \qquad \frac{x^2}{a_1^2}-2z=0$. Analogamente l'intersezioni con i piani $y=h$ sono parabole con asse parallelo all'asse z e vertice sulla parabola $\gamma:\ x=0, \qquad \frac{y^2}{a_2^2}-2z=0$. L'intersezione di Q con i piani $z=h$ sono ellissi per $h>0$, che diventano sempre più grandi al crescere di h.
L'intersezione con $z=0$ è un unico punto reale, mentre i piani $x=h$ con $h<0$ non intersecano Q in nessun punto reale. Ciò vuol dire che Q è tutta al di sopra del piano $z=0$. ***Paraboloide di rotazione*** Se $a_1=a_2$ Q si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la parabola di equazione

$$\gamma:\ x=0, \qquad \frac{y^2}{a_1^2}-2z=0.$$



Z
a2
a1
Y
X

Ellissoide

Iperboloide a una falda

Iperboloide a due falde

Paraboloide ellittico

Paraboloide iperbolico

Quadriche rigate

Coni quadrici

Cilindri quadrici

Quadriche formate da due piani

Piani doppi

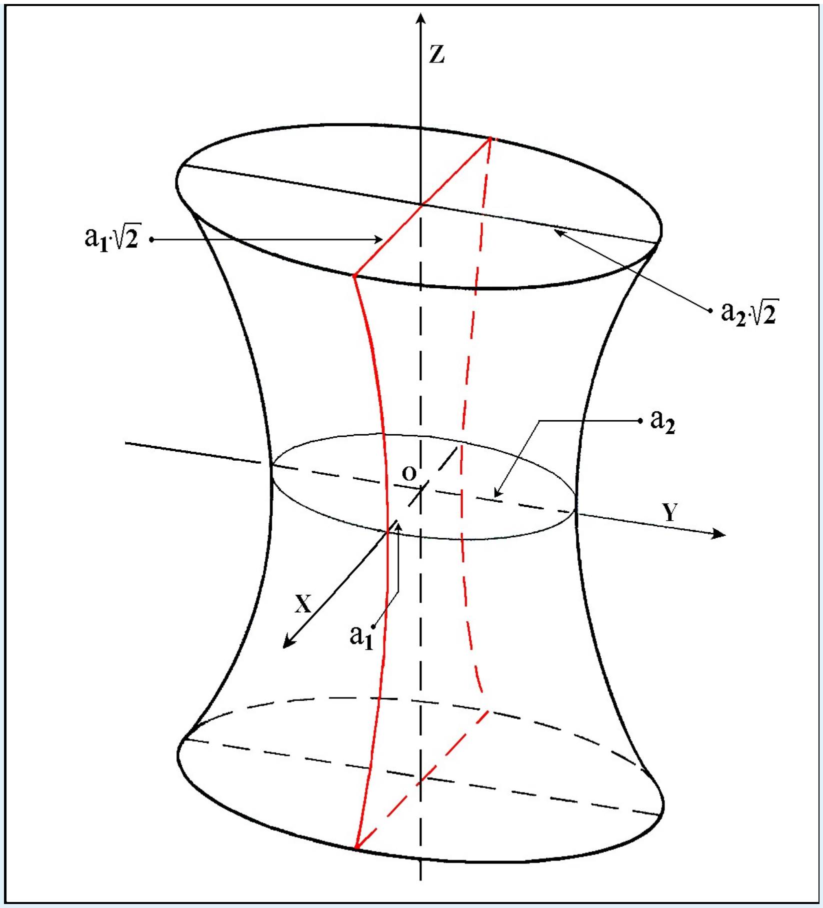
Rappresentazione delle quadriche

Iperboloide a una falda

Superficie data dall'equazione ridotta
$$\mathcal{Q}: \ \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0$$
dove a_1, a_2, a_3 sono > 0. Con lo stesso procedimento usato per l'ellissoide si vede che i piani coordinati, gli assi coordinati e O sono elementi di simmetria di $\mathcal{Q}$. Se $a_1 \neq a_2$ non ce ne sono altri. Le intersezioni con i piani $z = h$ sono ellissi che diventano sempre più grandi, e tendono all'infinito al crescere di h in valore assoluto. Le intersezioni con i piani $x = h, \ y = h$ sono iperboli. Queste iperboli sono equilatere se $a_1 = a_3$ (per i piani $x = h$) o $a_2 = a_3$ (per i piani $y = h$).

affine

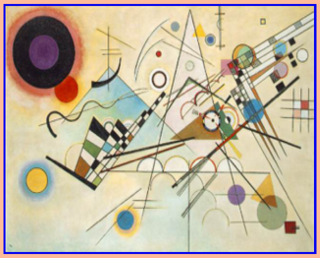
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Iperboloide di rotazione a una falda

Se $a_1 = a_2$ $\mathcal{Q}$ si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z l'iperbole di equazione

$$\gamma: \; \frac{y^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0\,, \qquad x = 0.$$



Ellissoide

Iperboloide a una falda

Iperboloide a due falde

Paraboloide ellittico

Paraboloide iperbolico

Quadriche rigate

Coni quadrici

Cilindri quadrici

Quadriche formate da due piani

Piani doppi

Rappresentazione delle quadriche

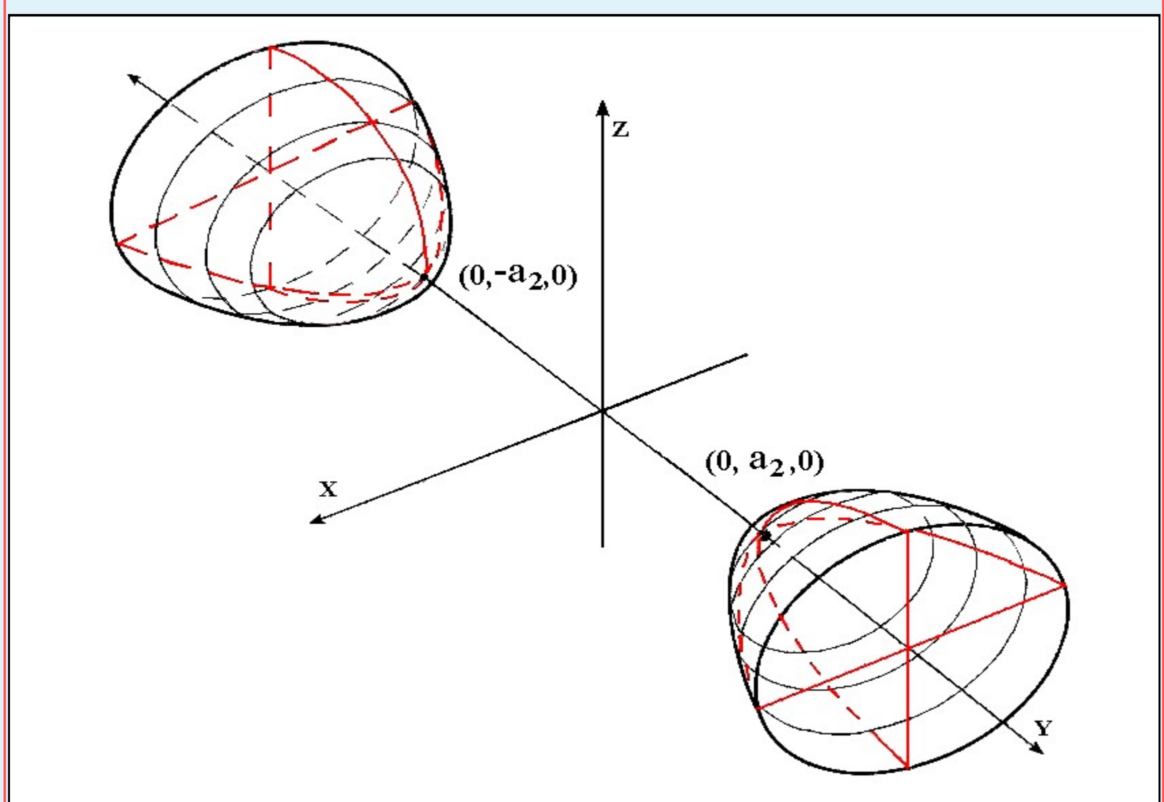
Iperboloide a due falde

Affine $x^2-y^2-z^2=1$

Superficie data dall'equazione ridotta $Q: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0$

dove a_1, a_2, a_3 sono > 0. Gli elementi di simmetria sono gli stessi dei casi precedenti. I piani $z = h$ intersecano la quadrica secondo un'iperbole il cui asse trasverso è sempre parallelo all'asse x. Analogamente dicasi dei piani $y = h$. Invece un piano $x = h$ interseca Q in un'ellisse se $h^2/a_1^2 > 1$, ossia $h > a_1$ o $h < -a_1$, sono ridotte a un punto reale se $h = \pm a_1$. L'intersezione con $x = h$ non contiene punti reali se $-a_1 < h < a_1$.

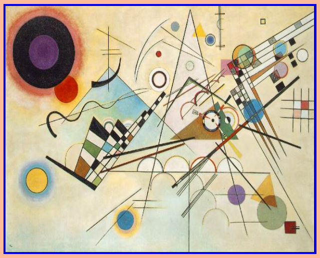
In particolare il piano $x = 0$ non interseca Q. Vuol dire che Q si compone di due parti distinte (le due "falde"), simmetriche rispetto a questo piano.



Iperboloide di rotazione a due falde

Se $a_2 = a_3$ $\mathcal{Q}$ si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x l'iperbole di equazione

$$\gamma: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0\,, \qquad y = 0.$$



Ellissoide

Iperboloide a una falda

Iperboloide a due falde

Paraboloide ellittico

Paraboloide iperbolico

Quadriche rigate

Coni quadrici

Cilindri quadrici

Quadriche formate da due piani

Piani doppi

Rappresentazione delle quadriche

Paraboloide iperbolico

Superficie data dall'equazione ridotta $Q: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} - 2z = 0$

dove a_1, a_2 sono > 0. Gli elementi di simmetria sono gli stessi del paraboloide ellittico. Le intersezioni con i piani $x = h$ e $y = h$ sono parabole con asse parallelo all'asse z: le prime sono rivolte verso il basso e hanno il vertice sulla parabola

$$\gamma_1: \ y = 0, \qquad \frac{x^2}{a_1^2} - 2z = 0;$$

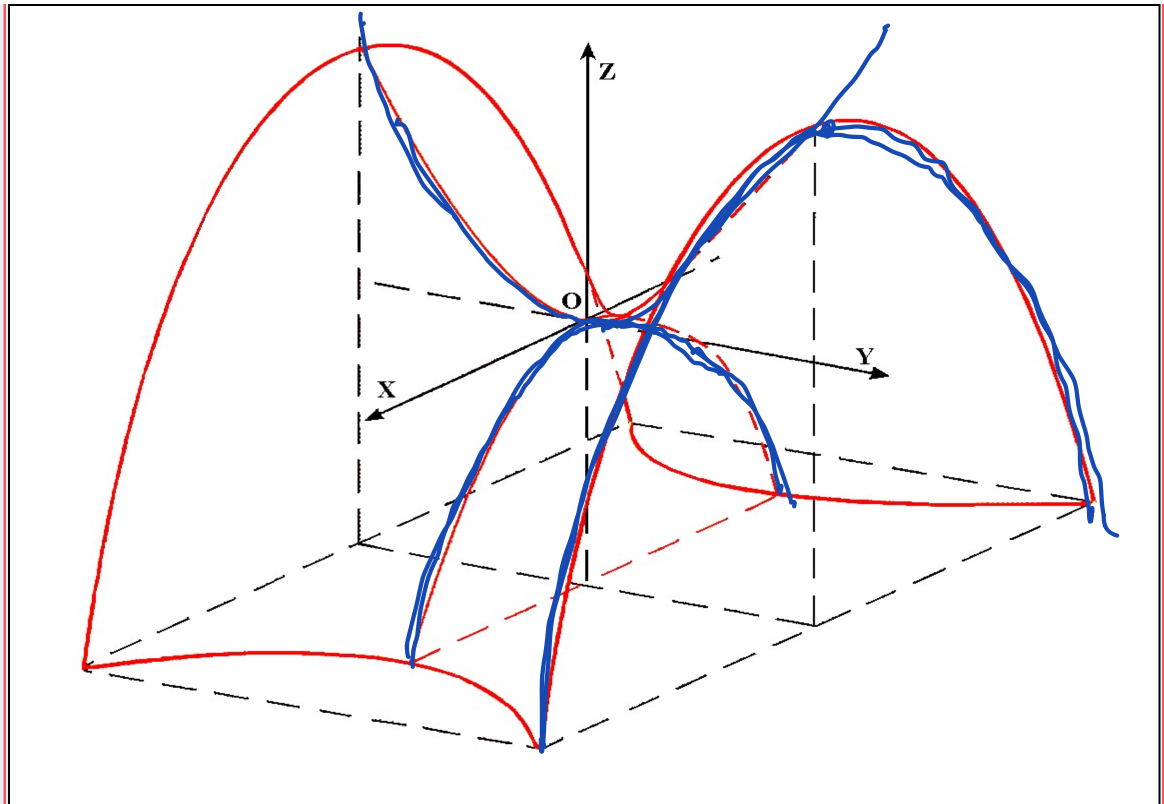
le seconde sono rivolte verso l'alto e hanno il vertice sulla parabola

$$\gamma_2: \ x = 0, \qquad -\frac{y^2}{a_2^2} - 2z = 0.$$

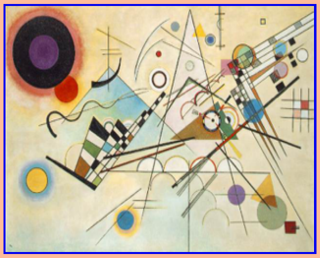
Le intersezioni con i piani $z = h$ sono iperboli i cui assi trasversi sono paralleli all'asse x se $h > 0$, all'asse y se $h < 0$. Per $h = 0$ l'iperbole è spezzata in due rette $(a_2x + a_1y)(a_2x - a_1y) = z = 0$. Il paraboloide iperbolico non è mai una superficie di rotazione.

affine

$x^2 - y^2 = z$



Per la sua forma particolare si chiama anche ***paraboloide a sella***.



Rappresentazione delle quadriche

[Ellissoide]

[Iperboloide a una falda]

[Iperboloide a due falde]

[Paraboloide ellittico]

[Paraboloide iperbolico]

[Quadriche rigate]

[Coni quadrici]

[Cilindri quadrici]

[Quadriche formate da due piani]

[Piani doppi]

Quadriche rigate

Osservazione 1: Gli iperboloidi a una falda e i paraboloidi iperbolici contengono delle rette e si dicono superfici rigate. Più precisamente, per ogni punto di una siffatta superficie passano due rette interamente contenute nella superficie stessa.

Consideriamo ad esempio il caso di un iperboloide ad una falda; se scriviamo la sua equazione nella forma:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1 - \frac{y^2}{a_2^2}$$

e poi come

$$\left(\frac{x}{a_1} - \frac{z}{a_3}\right)\left(\frac{x}{a_1} + \frac{z}{a_3}\right) = \left(1 - \frac{y}{a_2}\right)\left(1 + \frac{y}{a_2}\right)$$

si vede che le rette di equazione

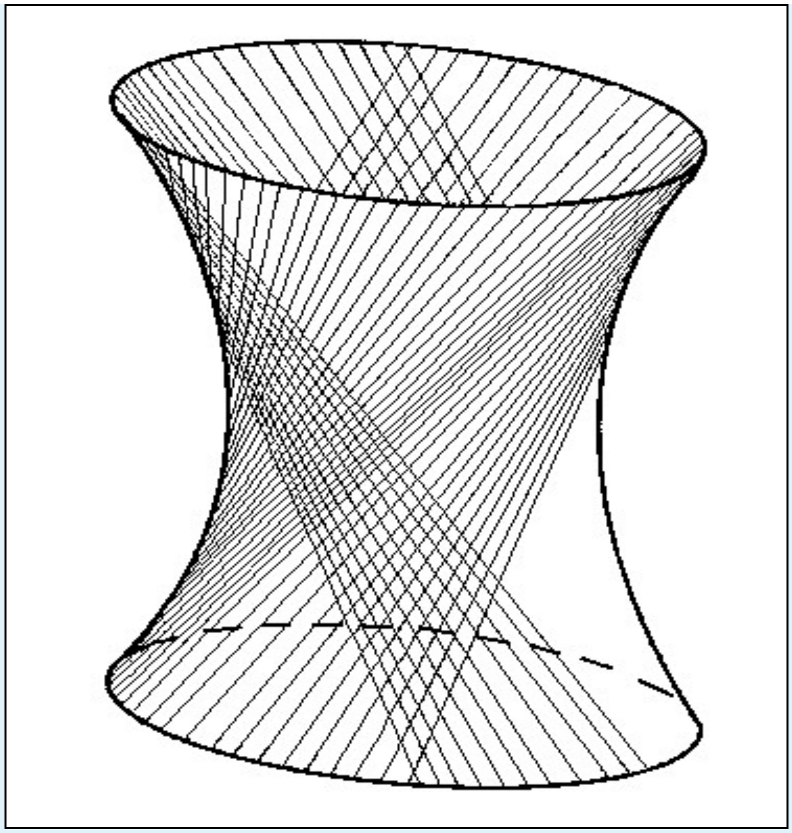
$$\left(\frac{x}{a_1} - \frac{z}{a_3}\right) = t\left(1 + \frac{y}{a_2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{x}{a_1} + \frac{z}{a_3}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{y}{a_2}\right)$$

appartengono alla quadrica.

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

intersecando con $y = 0$

$$x^2 - z^2 = 1$$



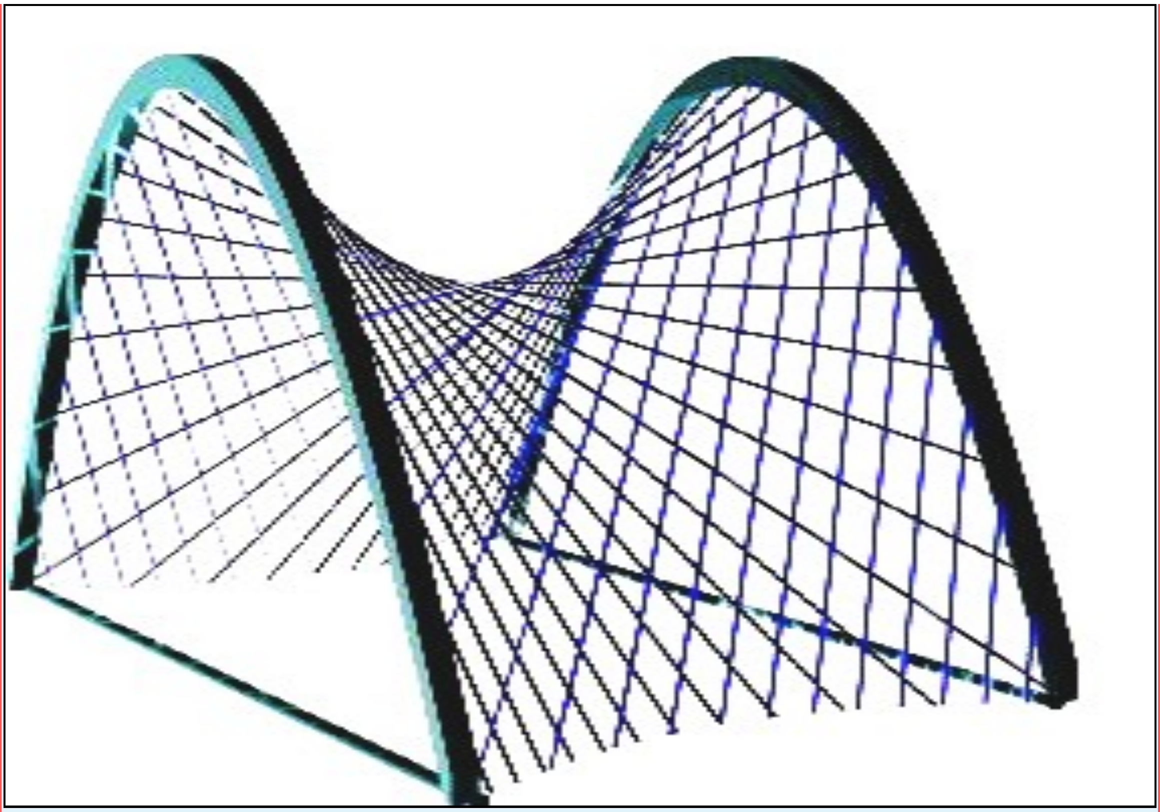
Nel caso del paraboloide iperbolico abbiamo una equazione del tipo:

$$\left(\frac{x}{a_1}-\frac{y}{a_2}\right)\left(\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}\right)=z^2$$

e quindi le due rette

$$\left(\frac{x}{a_1}-\frac{y}{a_2}\right)=tz \quad \text{e} \quad \left(\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}\right)=\frac{1}{t}z$$

sono contenute in tale superficie.



DIMOSTRAZIONE del punto 2 lasciato in sospeso nel Lemma 13.2.2.

Sia n_+ il numero di autovalori positivi e siano $v_1, , v_{n_+}$ gli autovettori corrispondenti, che fanno parte di una base $v_1, , v_{n_+}, v_{n_++1}, , v_n$ di autovettori.

Lo spazio $W = \mathrm{Span}(v_1, , v_{n_+})$ è uno spazio di dim n_+ su cui $\langle \ | \ \rangle_A$ è def positiva.

Viceversa sia U un s. spazio di V con dim $U > n_+$. Mostriamo che $\langle \ | \ \rangle_A$ non è def pos. su U.

Chiamo $Z = \mathrm{Span}(v_{n_++1}, , v_n)$

Noto che $\dim Z = n - n_+$

Ora per Grassmann

$$\dim(Z \cap U) = \dim Z + \dim U - \dim(Z+U)$$

che è

$$\geq \underbrace{(n - n_+)}_{\text{è dim } Z} + \underbrace{n_+}_{\text{dim } U \geq n_+} - \underbrace{n}_{n \geq \dim(Z+U)} = 0$$

Dunque $Z \cap U \neq \{0\}$ e prendo

$u \in Z \cap U$, $u \neq 0$.

Ma $\langle u | u \rangle_A \leq 0$ perché

$u \in Z$. dunque

$$u = \gamma_1 v_{n_+ +1} + \dots + \gamma_{n-n_+} v_n$$

e i vettori $v_{n_+ +1}, \dots, v_n$ sono tali che

$$\langle v_{n_+ +1}, v_{n_+ +1} \rangle_A \leq 0$$

$$\vdots$$

$$\langle v_n, v_n \rangle_A \leq 0$$

perché corrispondono ad autovalori non positivi,

Allora $U \neq 0$ e $\langle u | u \rangle_A \leq 0$

mostra che su U il prodotto

$\langle \ | \ \rangle_A$ non è def positivo

$\square$