

Esercizio 11.2.1

Classificare a meno di trasformazioni affini
la conica

(K) $\underline{x^2 + 2xy + y^2} + x + y = 0$

matrice associata.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 0 \quad d_3 = 0$$

↑ due colonne uguali.

la conica è degenera.

$$(x+y)^2 + (x+y) = 0$$

$$(x+y)(x+y+1) = 0$$

la conica è dunque l'unione di
due rette parallele

$$x+y=0$$

$$x+y+1=0$$

②

$$2x^2 - 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = -1$$

$$\begin{aligned} 2 + 0 + 0 \\ -0 - 2 - 1 = \\ = -1 \end{aligned}$$

Limite nel caso $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$

dunque la conica è una ellisse.

①①.2.2. stesso testo

⑤

$$x^2 - \sqrt{2}xy + 4y^2 - 2x + 4y + \sqrt{5} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 & 2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \\ -1 & 2 & \sqrt{5} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1 \quad d_2 = \frac{7}{2} \quad d_3 =$$

$$d_3 = 4\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 4 - 4 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \left(\frac{7}{2} \sqrt{5} \right) + (2\sqrt{2}) - 8 > 0$$

Liame nel caso $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$
e la conica è vuota.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \quad \lambda_3 > 0$$

② $2x^2 - 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 1 = -1$$

Liamo nel caso $d_2 > 0$ ma

$d_1 \cdot d_3 < 0$ allora la conica è una ellisse.

Es 11.2.3

Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica.

(a) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ -3 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 5 \quad d_2 = 16$$

$$d_3 = -25k + 45 + 45 - 125 - 45 + 9k = -80 - 16k$$

$$d_3 \begin{cases} < 0 \text{ per } k > -5 \\ = 0 \text{ per } k = -5 \\ > 0 \text{ per } k < -5 \end{cases}$$

ovunque la conica

for $K = -5$ is degenerate.

$$\underbrace{5x^2 - 6xy + 5y^2}_{\text{matrix}} - 10x + 6y + 5 = 0$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ -3 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t & M & A & M \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5x^2 + \frac{16}{5}y^2 = 0 \quad \text{è un punto}$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

per $K > -5$

$$d_2 > 0 \quad \text{e} \quad d_1 \cdot d_3 < 0$$

la conica è una ellisse.

per $K < -5$

$$d_2 > 0 \quad \text{e} \quad d_1 \cdot d_3 > 0$$

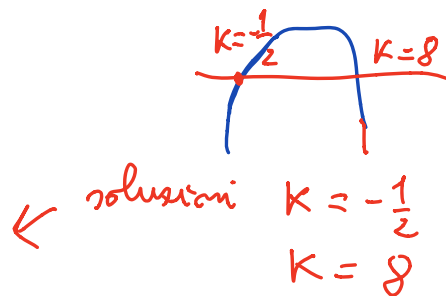
la conica è vuota.

$$\textcircled{c} \quad (k+1)x^2 + 2(2k-1)xy + (2k+9)y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} k+1 & 2k-1 & 1 \\ 2k-1 & 2k+9 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = k+1$$

$$d_2 = -2k^2 + 15k + 8$$



$$d_3 = 6k^2 - 79k - 41$$

$$d_2 \begin{cases} < 0 & \text{per } k < -\frac{1}{2} \text{ e } k > 8 \\ = 0 & \text{per } k = -\frac{1}{2} \text{ e } k = 8 \\ > 0 & \text{per } -\frac{1}{2} < k < 8 \end{cases}$$



$d_3 =$ > 0 per $K < -\frac{1}{2}$ e $K > \frac{41}{3}$
 $= 0$ per $K = -\frac{1}{2}$ e $K = \frac{41}{3}$
 < 0 per $-\frac{1}{2} < K < \frac{41}{3}$

$$\frac{41}{3} > 8$$

Studiati i vari casi

- per $K < -\frac{1}{2}$

$d_2 < 0$ per cui è un'iperbole

- per $K = -\frac{1}{2}$ e $d_2 = 0$

la conica è degenera.

$$\frac{1}{2}x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 8xy + 16y^2}_{(x-4y)^2} + \underbrace{4x - 16y - 6}_{=0} = 0$$

$$(x - 4y)^2$$

Prove

$$(x - 4y + a)(x - 4y + b) = 0$$

Per la parte non quadratica emerge

$$\begin{aligned} a(x - 4y) + b(x - 4y) + ab &= \\ &= 4x - 16y - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}x - \underline{4a}y + \underline{b}x - \underline{4b}y + ab &= \\ &= \underline{4x - 16y - 6} \end{aligned}$$

system

$$\begin{cases} a+b=4 & a=4-b \\ -4a-4b=-16 & \leftarrow \text{multipl. mit } -1 \\ ab=-6 \end{cases}$$

setze $a = 2 + \sqrt{10}$
 $b = 2 - \sqrt{10}$

$$(4-b)b = -6$$

$$-b^2 + 4b + 6 = 0$$

$$b^2 - 4b - 6 = 0$$

$$\Delta = 16 + 24 = 40$$

$$b_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$$

$$\underbrace{(2 + \sqrt{10})}_a \underbrace{(2 - \sqrt{10})}_b = 4 - 10 = -6$$

$$(x - 4y + 2 + \sqrt{10})(x - 4y + 2 - \sqrt{10}) = 0$$

sono due rette parallele.
 per cui studiamo i casi $k > -\frac{1}{2}$ -----

(c) $x^2 - 2xy + 2k y^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & 2k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 2k - 1$$

$$\begin{aligned} d_3 &= 2k - k - k - 2k^3 - 1 - 1 \\ &= -2k^3 - 2 = -2(k^3 + 1) \end{aligned}$$

$$d_3 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad K = -1$$

dunque

se $K \neq -1$ la conica non è degenera

ed è : studio d_2

$$\text{se } 2K - 1 \geq 0$$

$$2K \geq 1$$

$$K \geq \frac{1}{2}$$

se $K < \frac{1}{2}$ $d_2 < 0$ la
conica è un'iperbole.

se $K = \frac{1}{2}$ $d_2 = 0$ la conica
è una parabola

se $K > \frac{1}{2}$ $d_2 > 0$ e

$$d_1 \cdot d_3 = -2(k^2 + 1) < 0$$

la curva è un'ellisse.

$$\text{se } k = -1$$

$$x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\rightarrow (x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$$

$$(x - (1 - \sqrt{3})y)(x - (1 + \sqrt{3})y)$$

$$= x^2 - 2xy - 2y^2$$

$$(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$$

$$(x - (1 - \sqrt{3})y)(x - (1 + \sqrt{3})y)$$

$$\begin{array}{c} \underline{x^2 - 2xy - 2y^2} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$x^2 - 3y^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = 0$$

due rette incidenti.

11.2.4 .

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 17 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{cc} 8 & -6 \\ -6 & 17 \\ 2 & 6 \end{array}$$

$$d_1 = 8$$

$$d_2 = 136 - 36 = 100$$

$$d_3 < 0$$

la conica è una ellisse. $d_2 > 0$
e $d_1 \cdot d_3 < 0$

L'esercizio chiede anche di trovare
una trasformazione affine. f di $\mathbb{R}^2$
che trasformi la conica nella
conica $x^2 + y^2 = 1$

e una isometria g di $\mathbb{R}^2$ che
trasformi la conica in un'ellisse
di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b > 0$$

"E facile, ^{vedremo} veder che la conica vuole è

$$(2x+y+z)^2 + (2x-4y-1)^2 = 1$$

$$\underbrace{8}_{4 \times 4} x^2 - 12xy + \underbrace{17}_{16+1} y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$$

$$(2x+y)^2 = 4x^2 + y^2 + 4xy$$

$$(2x-4y)^2 = 4x^2 + 16y^2 - 16xy$$

$$(2x+y+a)^2 + (2x-4y+b)^2 = 1$$

$\uparrow$ $\uparrow$

La f allora è

$$\begin{array}{lcl} x & \longrightarrow & 2x+y+z \\ y & \longrightarrow & 2x-4y-1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} Q & v \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 2x-4y-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f è associata alla matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 2x-4y-1 \end{pmatrix}$$

Per la Q ortogonale basta che
le righe di Q siano due vettori
ortonormali

$${}^t Q Q = Id.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{2\sqrt{5}} & \frac{-4}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Paragrafo
12.4

ora Q è ortogonale.

questa z

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} (2x + y + z)$$

$$y \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}} (2x - 4y - 1)$$

con questo cambio di variabile che
corrisponde ad una isometria.

$$\begin{pmatrix} B & v \\ t_w & c \end{pmatrix} \uparrow \begin{pmatrix} 0 \\ B & v \\ 0 & c \end{pmatrix} \boxed{Bx + v}$$

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$