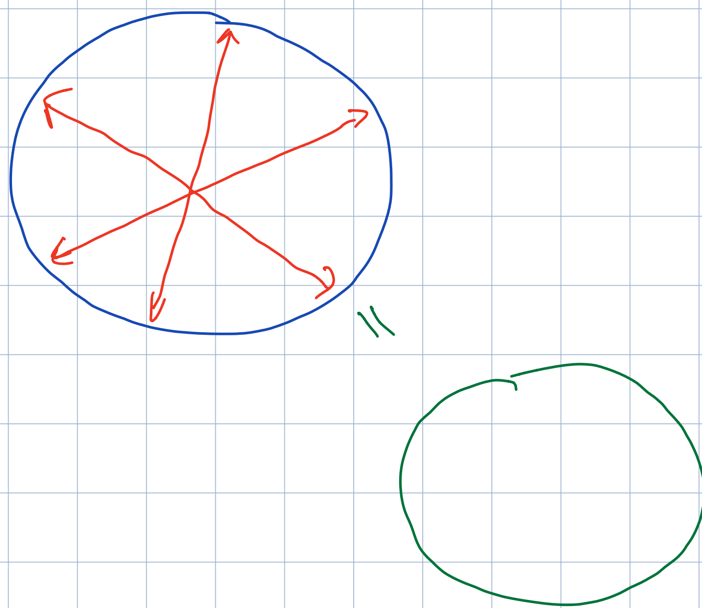
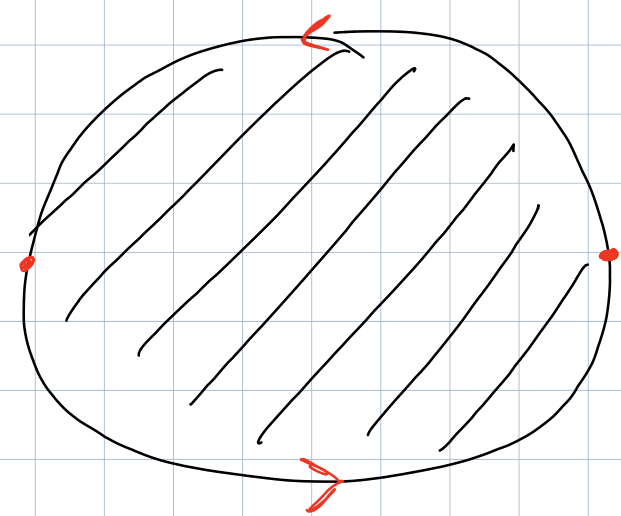
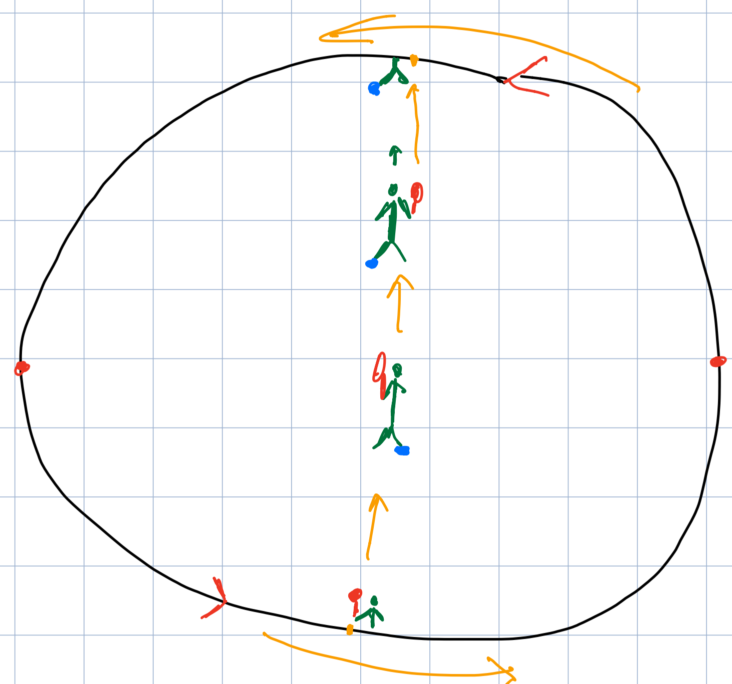
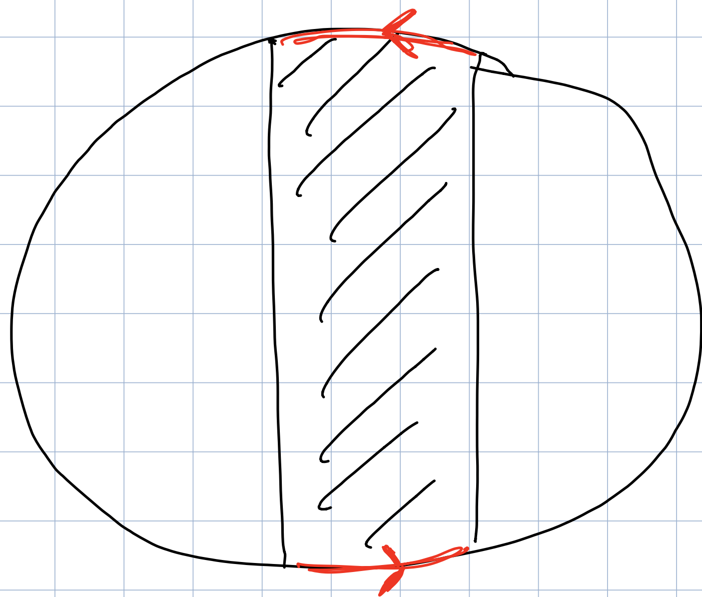
Geometrie 8/4/20

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$ 





Nastro di Möbius

— o —

$$\underbrace{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}_{\text{rette in } \mathbb{R}^{n+1}} = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{1\}$

$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ = insieme dei punti all'∞ di $\mathbb{R}^n$ = direzioni (senza verso) di rette

<u>Def</u>: chiamo sottospazio affine di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'immagine in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di un sottosp. vett. di dim > 0 in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Es: in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

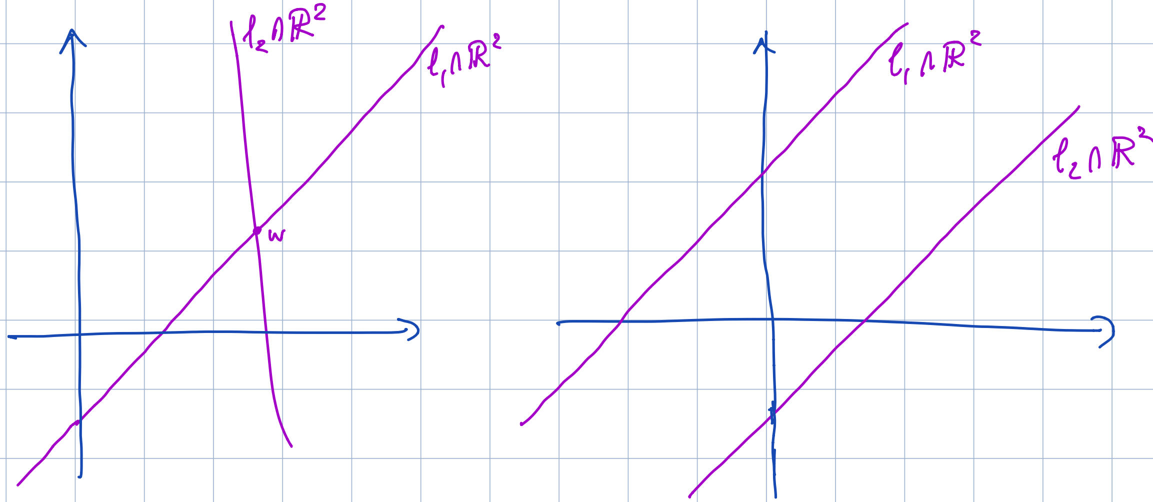
retta in $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ punto in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

piano in $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Prop: due rette distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si incontrano sempre in un punto.

Dim: $l_1 \neq l_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vengono da $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^3$ piani distinti. $P_1 \cap P_2 = W$ W retta in $\mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$ $l_1 \cap l_2 = w$ punto che corrisponde a W. $(w = [W])$. $\blacksquare$

Oss: se $l_1 \neq l_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non sono la retta all'∞ ho due casi per $l_1, l_2 \cap \mathbb{R}^2$:



$l_1 \cap l_2 = w$ è il punto all'∞ che corrisponde alla loro comune direzione

Prop: se $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ è omogeneo (di grado d) allora $Z = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : p(x) = 0\}$ è "ben definito".

[Ho usato x per fare un calcolo che deve riguardare $[x]$: devo vedere che se $y \in [x]$ ho $p(y) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = 0$.]

Dim: $y\in[x] \Rightarrow y=\lambda x \Rightarrow p(y)=p(\lambda x)$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_{n+1}=d} a_{k_1,\dots,k_{n+1}} (\lambda x_1)^{k_1}\cdots(\lambda x_{n+1})^{k_{n+1}}$$

$$= \lambda^d \cdot \sum_{k_1+\dots=d} a_{k_1\dots}\, x_1^{k_1}\cdots x_{n+1}^{k_{n+1}}$$

$$= \lambda^d\cdot p(x).$$ ■

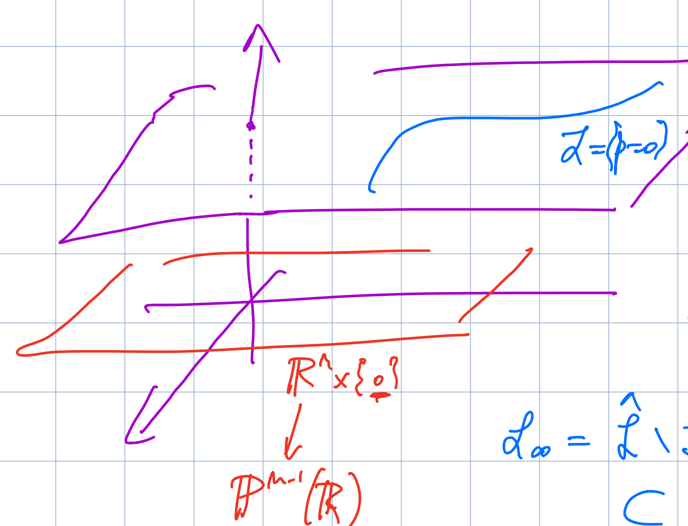
Oss: se ho $p(x)\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ posso associargli un $\hat p(x)\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_{n+1}]$ omogeneo dello stesso grado.

$3x^2y^3+5xy^4-7x^2y^2+2xy^2-7y+8$

$\rightsquigarrow 3x^2y^3+5xy^4-7x^2y^2z+2xy^2z^2-7yz^4+8z^5$

Ritrovo $p(x)$ ponendo $x_{n+1}=1$ in $\hat p(x)$

Sia $\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{R}^n : p(x)=0\}$



$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n\times\{1\}$

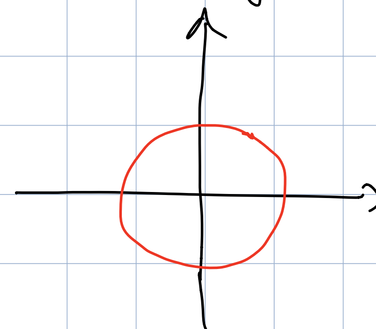
$\mathcal{L}\subset\hat{\mathcal{L}}=\{[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : \hat p(x)=0\}$

$\mathcal{L}_\infty = \hat{\mathcal{L}}\setminus\mathcal{L}$ = insieme pti all'∞ di $\mathcal{L}$

$\subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$

$\mathcal{L}_\infty=\{[x]\in\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) : \hat p(x,0)=0\}$

Esempio: pti all'∞ delle coniche non degeneri.

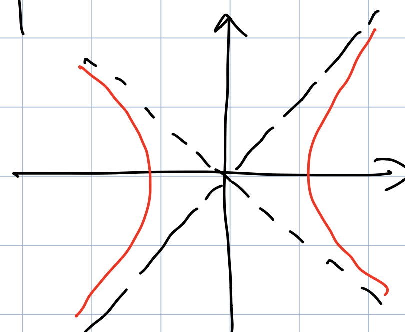


• ellisse $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$

$\hat{\mathcal{C}}: x^2+y^2=z^2$

$\mathcal{C}_\infty: x^2+y^2=0$

$\mathcal{C}_\infty = \emptyset$



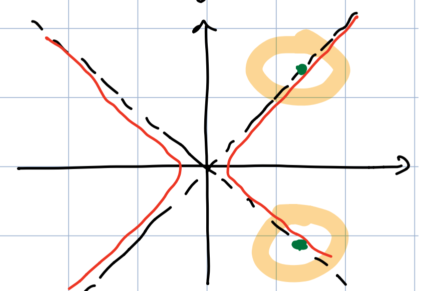
• iperbole $\mathcal{C}: x^2-y^2=1$

$\hat{\mathcal{C}}: x^2-y^2=z^2$

$\mathcal{C}_\infty: x^2-y^2=0$

$\mathcal{C}_\infty = \{\underbrace{[1:1],[1:-1]}_{\text{le direz. degli asintoti}}\}$

zoom out



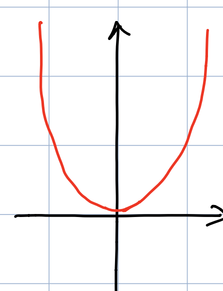
Notazione: indico $[x]$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

con $[x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_{n+1}]$

non contano gli x_i ma solo i loro rapporti

x_i coord. omogenee

$$[\sqrt{3} : -\sqrt{6} : 5] = [-3 : 3\sqrt{2} : -5\sqrt{3}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

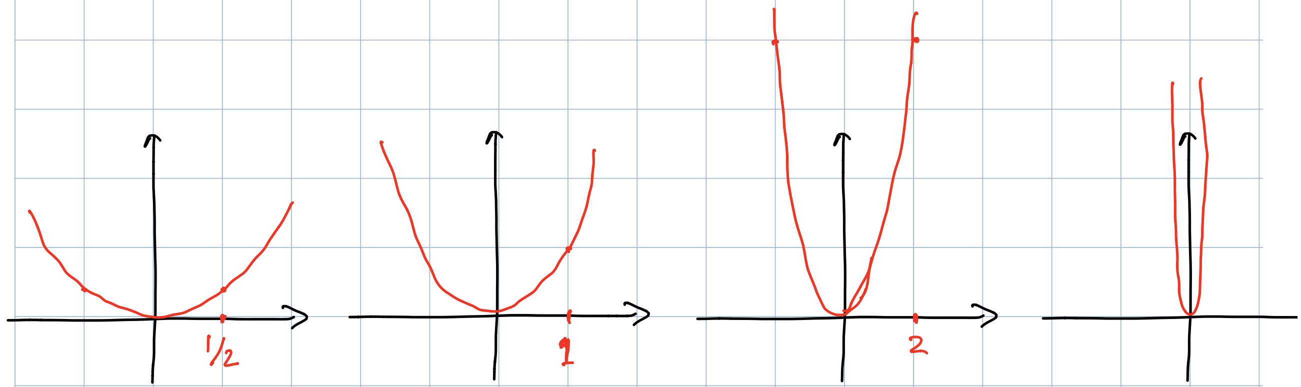


• parabole $\mathcal{C}: y=x^2$

$\hat{\mathcal{C}}: yz=x^2$

$\mathcal{C}_\infty: x^2=0$

$\mathcal{C}_\infty = \{\underbrace{[0:1]}_{\text{la direz. dell'asse}}\}$



$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) =$ rette in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

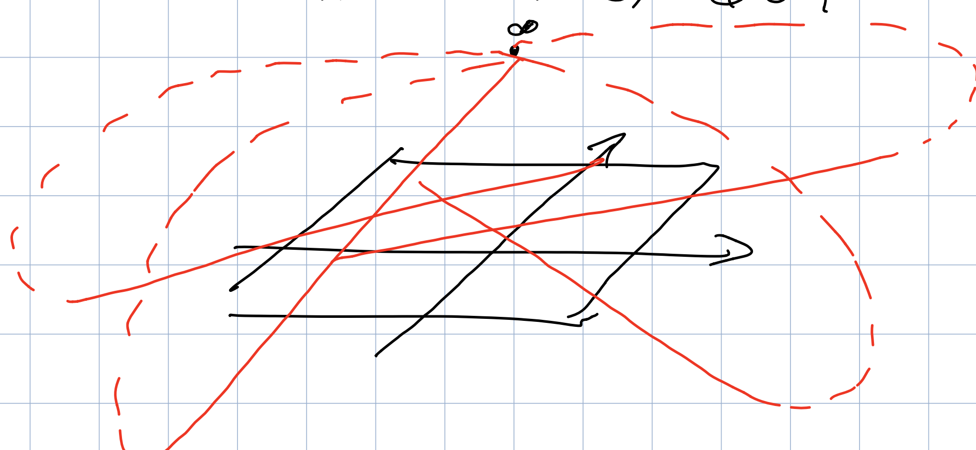
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \{z \in \mathbb{C}^2 : z \neq 0\} \big/_{z \sim \lambda \cdot z}$$

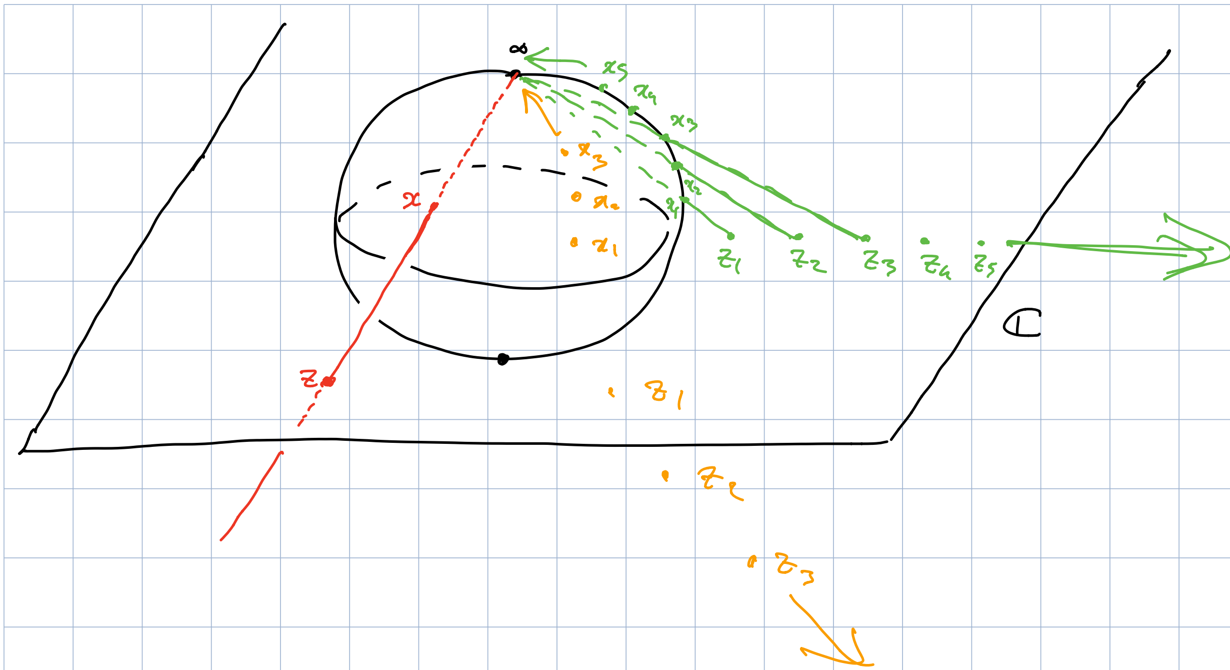
$$= \{(w,1) : w \in \mathbb{C}\} \cup \underline{\mathbb{P}\left(\{(w,0) : \underset{w \neq 0}{w \in \mathbb{C}}\}\right)}$$

$$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{$ pti all'∞ che sono le direz. delle rette $\}$

$\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{$un solo pto all'$\infty\}$





$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Cambi di coord. naturali per:

- $\mathbb{R}^n$ come sp. vett. $\quad x' = M\cdot x \quad \det(M)\neq 0$
- $\mathbb{R}^n$ come sp. aff. $\quad x' = M\cdot x + v \quad \det(M)\neq 0$
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \quad [x'] = [N\cdot x] \quad \det(N)\neq 0.$

Q: Quali sono i cambi di coord. di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che preservano $\mathbb{R}^n$? Equiv: quelli che preservano i pti all'∞ $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$:

$$\left[\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right] \longmapsto \left[N\cdot\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}M & v\\ {}^tw & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{matrix}Mx\\ {}^tw\cdot x\end{matrix}\right]$$

$N\in M_{(n+1)\times(n+1)}$

$M\in M_{n\times n} \quad v,w\in\mathbb{R}^n,\ c\in\mathbb{R}$

Voglio che sia sempre del tipo $\left[\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}\right]$

$\Rightarrow w=0$

Su $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{1\}$ l'azione è

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}} \mapsto \left[\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} M \cdot x + v \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} M/c \cdot x + v/c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$c \neq 0$

$\det(M) \neq 0$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} M' \cdot x + v' \\ 1 \end{pmatrix}}$$

A : sono quelli affini

Oss: un'equazione di II grado non omogenea in $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come :

$$^t x \cdot Q \cdot x + 2\langle l \mid x \rangle + c = 0 \qquad Q \text{ simmetrica } n \times n$$

ovvero

$$^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q & l \\ ^t l & c \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad A \text{ simmetrica } (n+1) \times (n+1)$$

Scopo: classificare gli insiemi def da equaz. di II grado in $\mathbb{R}^n$ / insiemi def da equaz. di II grado omogenee in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, a meno di cambi di coord affini/proiettivi.

Un luogo $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ $\left\{ x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \right\}$ si dice non degenere se $\det(A) \neq 0$.

Prop: data A $(n+1)\times(n+1)$ simm. il luogo $\{ x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x A x = 0 \}$ equivale/proiettività a $\{ x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2 \}$.

Dim: $\exists M$ ortog $^tM = M^{-1}$ t.c. $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & & \\ & & & -\lambda_{p+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -\lambda_{p+q} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \qquad \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} > 0$

$$x = M \cdot y \qquad {}^t x A x = 0$$

$${}^t y ({}^t M A M) y = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 - (\lambda_{p+1}) y_{p+1}^2 - \dots - (\lambda_{p+q}) y_{p+q}^2 = 0$$

$$x_j = \sqrt{\lambda_j} \cdot y_j \qquad x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2 . \qquad \boxtimes$$

Oss: a meno di cambiare segno all'equaz. posso supporre $p \geq q$.

Coniche non degeneri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \longrightarrow \emptyset$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \underline{\text{unica}}$$

Conseguenza: le tre coniche affini $\mathcal{L}$ (non deg) hanno la stessa conica proiettiva $\hat{\mathcal{L}}$ come completamento:

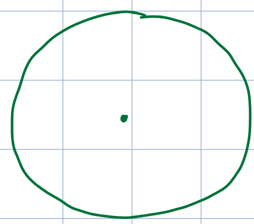
$$x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

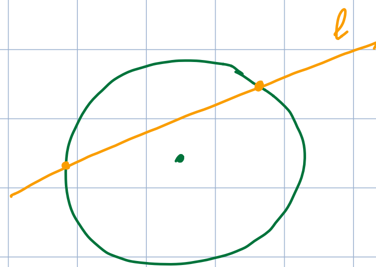
$$x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow x^2 - y^2 = z^2 \longrightarrow y^2 + z^2 = x^2$$

$$y = x^2 \longrightarrow yz = x^2 \longrightarrow (u+v)(u-v) = x^2 \quad u^2 - v^2 = x^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x^2 + v^2 = u^2$$

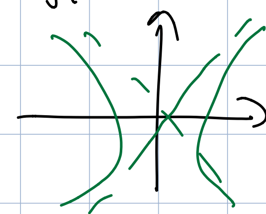
Dunque: le coniche affini differiscono fra loro per la posizione della retta all'∞ rispetto a $\hat{\mathcal{L}}$.

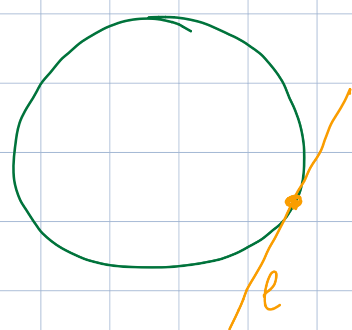




$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

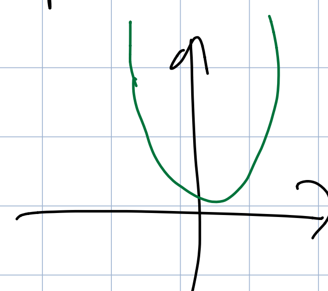
$f(\ell) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{z=0\}$





$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$f(\ell) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{z=0\}$



Classificazione affine:

su un'equazione $\quad {}^t\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}Q & \ell\\ {}^t\ell & c\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=0 \quad$ tramite affinità e cambio equaz. posso agire così:

- $Q \rightsquigarrow {}^tMQM$
- $A \rightsquigarrow {}^tN\cdot A\cdot N \qquad N = \begin{pmatrix}M & v\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

agisco tramite affinità

- $A \rightsquigarrow -A$
- $A \rightsquigarrow k\cdot A \qquad k>0$

cambio equazione ma non luogo

$\mathcal{C} = \left\{ \binom{x}{1} : {}^t\binom{x}{1} A \binom{x}{1} = 0 \right\}$ "ε" / affinità

$\det(A) \neq 0$

interpretaz. intrinseca

• $\emptyset$	$d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$	autoval. di A tutti concordi
• ellisse	$d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$	autoval Q concordi, ma non di A
• iperbole	$d_2 < 0$	autoval Q discord.
• parab.	$d_2 = 0$.	autoval. Q uno nullo

<u>Oss</u>: tali condizioni si preservano tramite le 4 operazioni di sopra.