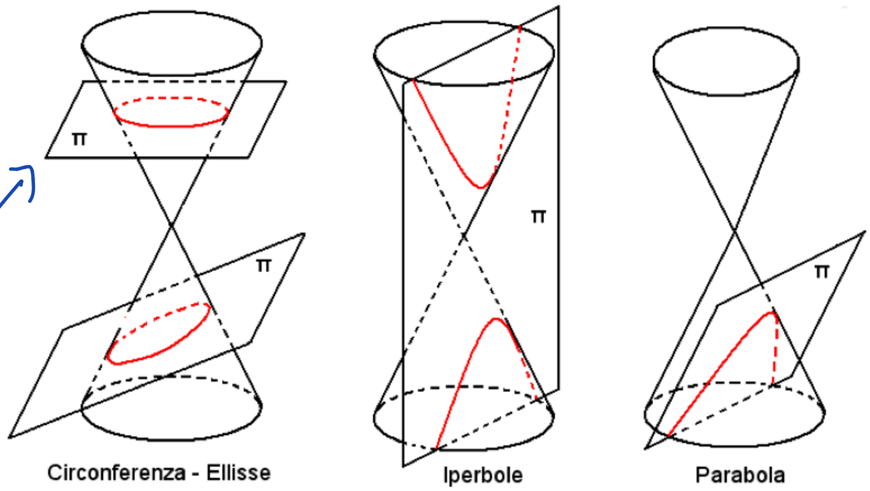
Cono $x^2+y^2=z^2$



Piano $z=1$

Vedi paragrafo:

Sezioni Coniche (11.1.2.)

Paragrafo 11.2.

MATRICE DI UNA CONICA

L'equazione generica di una conica nel piano è

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Si osserva che la si può ottenere così:

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

la matrice è simmetrica

per ora solo accennata

Idea: se, con una trasformazione affine o con una isometria cambiassi le coordinate in modo da rendere diagonale la matrice....

nelle nuove coordinate la conica verrebbe descritta da una equazione del tipo.

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$$

(INTERVERRA' IL TEOREMA SPETTRALE).

Il seguente teorema permette di capire facilmente, data una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, che tipo di conica è ad essa associata.

<u>Teorema</u> Sia $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{L}$ la conica ad essa associata in $\mathbb{R}^2$.

Se $\det A \neq 0$ allora $\mathcal{L}$ è l'insieme vuoto oppure esiste una trasformazione affine che manda $\mathcal{L}$ in

- $x^2 + y^2 = 1$ (ellisse) oppure
- $x^2 - y^2 = 1$ (iperbole) oppure
- $y = x^2$ (parabola).

Più in dettaglio vale che

1) Se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 > 0$ allora $\mathcal{L}$ è vuoto

2) Se $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$ allora $\mathcal{L}$ è una ellisse

3) Se $d_2 < 0$ allora $\mathcal{L}$ è un'iperbole

4) Se $d_2 = 0$ allora $\mathcal{L}$ è una parabola

(notare che si è assunto $\det A = d_3 \neq 0$).

Questo teorema classifica a meno di affinità tutte le coniche non degeneri (ossia con $\det A \neq 0$).

Le coniche degeneri sono le seguenti.
($\det A = 0$)

- un singolo punto $\quad (x^2 + y^2 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- due rette incidenti $\quad (2xy = 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- due rette parallele. $\quad (x^2 = 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Una retta "doppia" $\quad (x^2 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- l'insieme vuoto $\quad (x^2 + 1 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il momento non facciamo la dimostrazione del teorema: la discuteremo fra qualche lezione in un contesto più generale.

Esercizio 11.2.1

Che tipo di conica è (a meno di affinità) quella descritta dalla seguente equazione.

RICORDO CHE UNA AFFINITÀ È

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v_0$$

con $\det M \neq 0$

e $v_0 \in \mathbb{R}^2$

a) $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$

Trovo la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Calcolo d_1, d_2, d_3

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$d_3 = \det A = 1 + 2\sqrt{3}$$

In quale caso siamo?

$$d_2 < 0$$

dunque IPERBOLE

b) $2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -3 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Si scopre che $\det A = 0$

Sarà una conica degenere. La studiamo con metodi elementari.

Si nota che.

$$2x^2 - xy - 3y^2 = (2x-3y)(x+y)$$

Infatti: ponendo $y = 1$ si trova il polinomio

$$\boxed{2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1)}$$

Allora $(2x-3y)(x+y) =$

$= 2x^2 - xy - 3y^2 \leftarrow$ è omogeneo di grado 2

Questo ci dà l'idea di lentare.

$$(2x-3y+a)(x+y+b)=$$

$$= 2x^2 - xy - 3y^2 \underbrace{-5x+10y-3}$$

Si trova che.

$$\begin{cases} a+2b+5=0 \\ a-3b-10=0 \\ ab+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

soluzione unica.

con soluzione $a=1 \quad b=-3$

La conica è dunque

$$(2x-3y+1)(x+y-3)=0$$

ossia data da due rette incidenti

c) $5x^2 - 4xy + 7y^2 + 4x - 3y - \sqrt{11} = 0$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -\frac{3}{2} \\ \hline 2 & -\frac{3}{2} & -\sqrt{11} \end{array}\right)$$

$d_1 = 5$

$d_2 = 31$

$d_3 = -\frac{109}{4} - 31\sqrt{11} < 0$

Allora

$d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0$ siamo nel caso dell'ellisse.

Inquadriamo lo studio delle coniche in un contesto più generale.

SPAZI PROIETTIVI (Capitolo 12)

Ripasso di che cosa è <u>una relazione</u>.

Sia X un insieme.

Una relazione R su X è un sottoinsieme di $X \times X$

Dato $(a, b) \in R \subseteq X \times X$ si dice che "a è in relazione con b" e si scrive anche $a R b$

<u>Definizione</u> Una relazione R su X si dice:

- "riflessiva" se $x R x \quad \forall x \in X$
- "simmetrica" se $x R y \Rightarrow y R x \quad \forall x, y \in X$

- "Transitiva" se $x R y$ e $y R z$
$$\Rightarrow x R z$$
$$\forall x, y, z \in X$$
- "di equivalenza" se è riflessiva, simmetrica e transitiva

<u>Esempio</u> Sia $X = \mathbb{Z}$

Dico che m è in relazione con n se il resto di m nella divisione per 5 è uguale al resto di n nella " " 5.

Per esempio

12 è in relazione con 32

12 è in " con 57

Questa relazione è di equivalenza.

NOTAZIONE
In generale per le relazioni di equivalenza scriveremo $\sim$ cioè scriveremo

$$a \sim b$$

"a è in relazione con b"

<u>Definizione</u> Fissata una relazione di equivalenza $\sim$ su X chiameremo "classe di equivalenza" di un $x \in X$ l'insieme

$$[x] = \{ y \in X : y \sim x \}$$

Diremo INSIEME QUOZIENTE di X rispetto a $\sim$ l'insieme

$X/\sim$ delle classi di equivalenza.

Diremo che un sottoinsieme di X che contenga esattamente un elemento per ciascuna classe di equivalenza è un "insieme di rappresentanti".

<u>Esempio</u> Sia $X = \mathbb{Z}$

Sia $\sim$ "avere lo stesso resto nella divisione per 5"

Allora le classi sono:

$[0], [1], [2], [3], [4]$

Si nota che

$\mathbb{Z}$ è l'unione disgiunta

$$[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$$

In generale, dato X insieme e una relazione di equivalenza $\sim$, risulta che X è l'unione disgiunta delle classi di equivalenza.

Nel nostro esempio,

$\mathbb{Z}/\sim$ chi è?

È dunque l'insieme di 5 elementi:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$$

Una storia comincerebbe da qui....

Su questo insieme si possono introdurre un $+$ e un $\cdot$

$$[2]+[3] = [2+3] = [5] = [0]$$

è la stessa classe.

$$[2]+[4] = [2+4] = [6] = [1]$$

$$[2]\cdot[4] = [2\cdot 4] = [8] = [3]$$

$$[2]\cdot[3] = [2\cdot 3] = [6] = [1]$$

Risulta che $\mathbb{Z}/n$ è un campo finito.

Esempio Sia $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

e sia $\sim$ la rel. di equiv.

$x \sim y$ se $\exists\, \lambda > 0$ t.c.

$$y = \lambda x$$

Per esempio in $\mathbb{R}^3$ $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$y = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Vale che $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Chi è $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim$?

È l'insieme i cui elementi sono le semirette in $\mathbb{R}^{n+1}$ (private dello 0).

Quindi

$$\left(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\right)\big/\sim$$

è in bigezione

con

$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} : \|x\|=1\}$$

sfera n-dimensionale

(è la generalizzazione della circonferenza perché $S^1=\{x\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \|x\|=1\}$

e della sfera

$$S^2=\{x\in\mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \|x\|=1\}$$)

perché in ogni semiretta c'è un solo punto che $\in S^n$ e viceversa per ogni punto di S^n passa una sola semiretta.

Definizione di spazio proiettivo.

<u>Def</u> Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Sia V sp. vett di dimensione ≥ 1 su $\mathbb{K}$. Consideriamo su $V \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \text{se } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ t.c. } y = \lambda x$$

Chiamo SPAZIO PROIETTIVO associato a V l'insieme

$$V \setminus \{0\} \big/ \sim \; = \mathbb{P}(V)$$

In particolare se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ chiamerò

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^{n}(\mathbb{K})$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\mathbb{R}^{3}}_{\text{dim } 3}) = \underbrace{\mathbb{P}^{2}(\mathbb{R})}_{\text{ha "dimensione" } 2}$$

Esempi in dimensione bassa:

- $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ è un punto

$$\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \big/ \sim$$

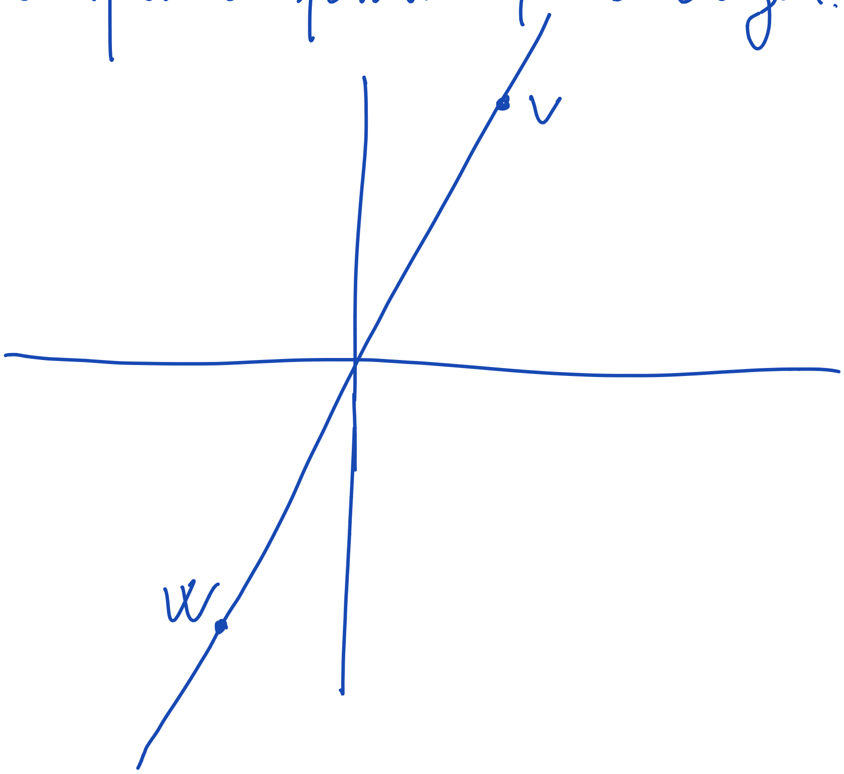
$\forall\, a, b,$ con $a \neq 0 \quad b \neq 0$

vale $a \sim b$ perché $a \cdot \frac{b}{a} = b$

Dunque c'è un'unica classe di equivalenza.

- $$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \big/ \sim$$

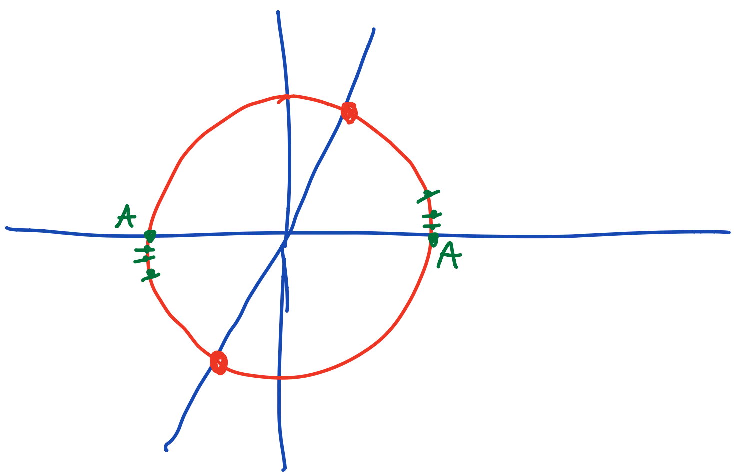
è in biezione con l'insieme delle rette nel piano passanti per l'origine.



$v \sim w$ se e solo giacciono sulla

stessa retta passante per l'origine.

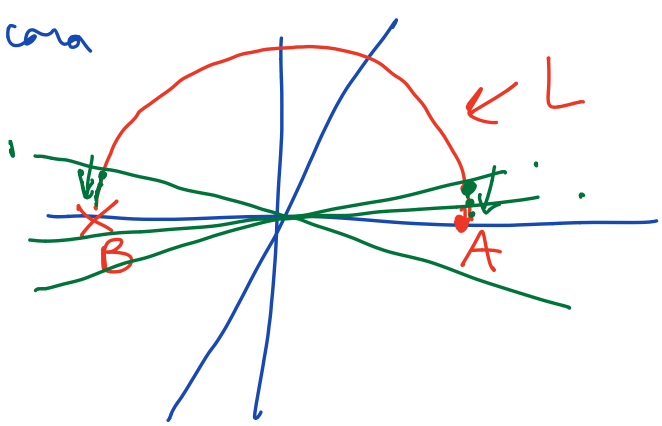
Per descriverlo in un altro modo



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è in bigezione con $S^1/\sim$

dove $\sim$ è la relazione che identifica due punti opposti.

Oppure ancora



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è in biiezione con la semicirconferenza L (in cui $A \in L$ ma $B \notin L$)

Quest'ultima descrizione dal punto di vista geometrico "dimentica" che i punti vicini ad A e i punti vicini a B sono vicini fra loro in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$