Geometria 1/4/20

Teo: A normale $(A \cdot A^* = A^* \cdot A) \Rightarrow \exists U$ t.c. $U^* = A^{-1}$

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Prop: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ antihermitiana $(A^* = -A)$

(in part. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ antisimmetrica ${}^tA = -A$)

$\Rightarrow A$ ha autoval immag. puri.

Dim: λ autoval, $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ autovett, $A \cdot z = \lambda z$

$$\langle A \cdot z | z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda z | z \rangle = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$$\| $$

$$\langle z | A^* \cdot z \rangle = \langle z | -A z \rangle = \langle z | -\lambda z \rangle = -\bar{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = -\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in i \cdot \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Es: $\begin{pmatrix} 7i & 4-3i \\ -4-3i & -5i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha \cdot i & 0 \\ 0 & \beta \cdot i \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad {}^tA = -A$.

Autoval: • $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso trovare base reale del relativo autospazio

• $i\lambda \in i\mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$; $p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow -i\lambda$ è anch'esso autovalore.

$$\boxed{\begin{array}{l} p(t) \in \mathbb{R}[t] \\ \alpha \in \mathbb{C},\ p(\alpha)=0 \\ \Rightarrow p(\overline{\alpha}) = 0 \end{array}}$$

Prendiamo $z \in \mathbb{C}^n$ autovettore, $z = x + iy$;

$A\cdot z = i\lambda \cdot z \Rightarrow \overline{A\cdot z} = A\cdot\overline{z} = -i\lambda\overline{z}$

$\Rightarrow \overline{z}$ è autovettore relativo a $-i\cdot\lambda$

$\Rightarrow \overline{z} \perp z$ in $\mathbb{C}^n$ (Teo spettrale)

• $\langle x - iy \mid x + iy\rangle_{\mathbb{C}^n} = 0 \Rightarrow \langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^n} - i\cdot\langle y|x\rangle_{\mathbb{R}^n} - i\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle y|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$

$\Rightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2i\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$

$\Rightarrow \|x\| = \|y\|$, $\langle x|y\rangle = 0$

$\Rightarrow (x, y)$ sistema ortonormale (dopo normalizzaz.)

• $A\cdot z = i\lambda z \Rightarrow A(x+iy) = i\lambda(x+iy) \Rightarrow Ax + iAy = i\lambda x - \lambda y$

$\Rightarrow Ax = -\lambda y \quad Ay = \lambda x \Rightarrow [A]^{(x,y)}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Ripetendo ciò per tutti gli autospazi trovo:

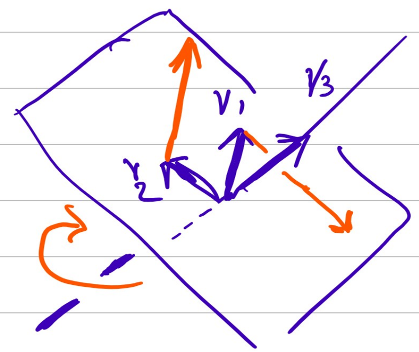
- $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$

$\Longrightarrow \exists M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ${}^tM = M^{-1}$ t.c.

$$
{}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}
$$

Es: $n = 3$ sempre coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conseguenza: se un corpo materiale è soggetto a forze $A \cdot x$ in x con A antisimmetrica $\Longrightarrow$ ruota intorno ad asse:



Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & 3 & -2 \\ -3 & t & -5 \\ 2 & 5 & t \end{pmatrix} = t^3 - 30 + 30 + 4t + 9t + 25t$$

$$= t(t^2 + 38) \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{38} \qquad \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow \exists$ base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ ortonormale t.c.

$$[A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{38} & 0 \\ -\sqrt{38} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oss: per trovare v_1, v_2, v_3 basta cercare autovet rel. a $i\sqrt{38}$ $w_1 = \mathrm{Re}(\ldots)$, $w_2 = \mathrm{Im}(\ldots)$

autovet rel. a 0 w_3 ; $v_j = \dfrac{w_j}{\|w_j\|}$

(sono automaticamente $\perp$ fra loro).

Prop: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ unitaria $(A^* = A^{-1})$

o in particolare $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale $({}^tA = A^{-1})$

$\Rightarrow A$ ha autoval. di modulo 1.

Dim: $Az = \lambda z$ $\qquad \langle Az | Az \rangle = \langle \lambda z | \lambda z \rangle = |\lambda|^2 \cdot \|z\|^2$

$= \langle A^* A z | z \rangle = \langle z | z \rangle = \|z\|^2$ $\qquad \Rightarrow |\lambda| = 1.$ ☒

Dunque se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ $A^* = A^{-1}$ $\exists \mathcal{B}$ ortonormale t.c. $[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\vartheta_n} \end{pmatrix}$

Per $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ${}^tA = A^{-1}$; autovalori:

- $\pm 1 \Rightarrow$ trovo autospazi reali
- $e^{i\vartheta} \notin \mathbb{R}$; prendo z autovet rispetto a $e^{i\vartheta}$

$\Rightarrow \bar{z}$ autovet rispetto a $\overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} \neq e^{i\vartheta}$

$\Rightarrow (\bar{z} | z)_{\mathbb{C}^n} = 0$ $\Rightarrow$ $z = x + iy$ $\|x\| = \|y\|$ $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$

$\Rightarrow (x, y)$ ortonormale / normalizzata

$$A(x+iy) = (\cos(\vartheta) + i\cdot\sin(\vartheta))\cdot(x+iy)$$

$$Ax + iAy = (\cos(\vartheta)\cdot x - \sin(\vartheta)\cdot y) + i\cdot(\sin(\vartheta)\cdot x + \cos(\vartheta)\cdot y)$$

$$\Rightarrow A\cdot x = \cos(\vartheta)\cdot x + \sin(\vartheta)\cdot(-y)$$

$$A\cdot(-y) = -\sin(\vartheta)\cdot x + \cos(\vartheta)\cdot y$$

$$\Rightarrow [A]_{(x,-y)}^{(x,-y)} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Fatto: data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad {}^tA = A^{-1}$ $\quad \exists\, \mathcal{B}$ ortonormale t.c.

$$[A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{matrix}} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{R_{\theta_k}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{n = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

id = rot $\theta = 0$ $\qquad$ rifl. retta $\qquad$ rifl. pto = rotaz $\theta = \pi$ $\qquad$ rotazione

Esercizio: dimostrarlo senza teorema spettrale.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & * \\ \sin(\theta) & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$c = \cos(\theta/2) \quad s = \sin(\theta/2)$

Affermo che se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \right)$ ho $[A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c^2 - s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3 - cs^2 + 2cs^2 \\ 2c^2 s + s^3 - c^2 s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$

$\boxed{n=3}$

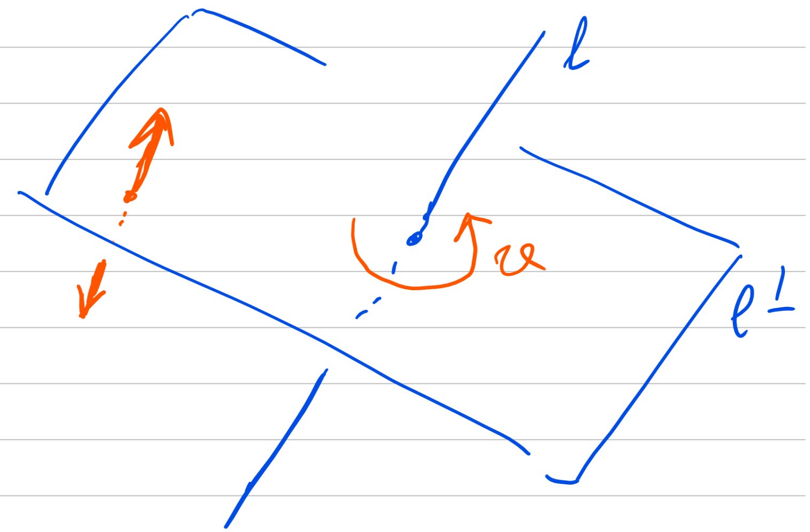
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

id.   rifl. piano   rifl. retta   rifl. pto

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotaz. intorno a l

rotaz. intorno a l
+ riflessione rispetto a $l^\perp$



Oss: se $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ${}^tM = M$, $v \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x) = M\cdot x + v \implies f$ isometria: $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y$.

Teo: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria $\implies f(x) = M\cdot x + v$ con M ortogonale

($\implies f$ invertibile)

Oss: "f isometria $\implies f$ invertibile" falsa in dim $= +\infty$.

Dim. ($n=2$). Passo dopo passo sostituisco f con una $g\circ f$ con g affine e isometria fino a ridurmi a $f = id$.

Def: una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo $f(x) = A\cdot x + v$, $A \in M_{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ è detta trasf. **affine**

Basta $f \rightsquigarrow g_1\circ f \rightsquigarrow g_2\circ(g_1\circ f) \rightsquigarrow \dots (g_k\circ\dots\circ g_1)\circ f = id$

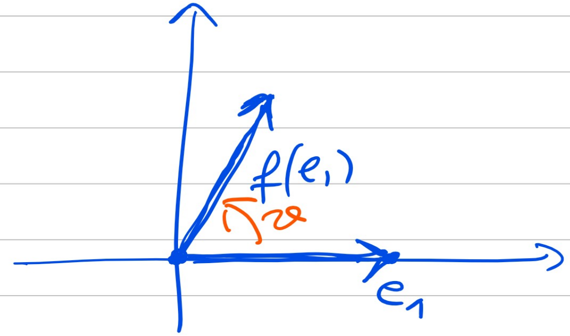
$\implies f = (g_k\circ\dots\circ g_1)^{-1}$ OK.

- se $f(0) \neq 0$ sostituisco f con $f - f(0) = g\circ f$

$g(x) = x - f(0)$

Ora ho $f(0) = 0$

- Se $f(e_1) \neq e_1$ sostituisco f con $\rho_{-\vartheta} \circ f$



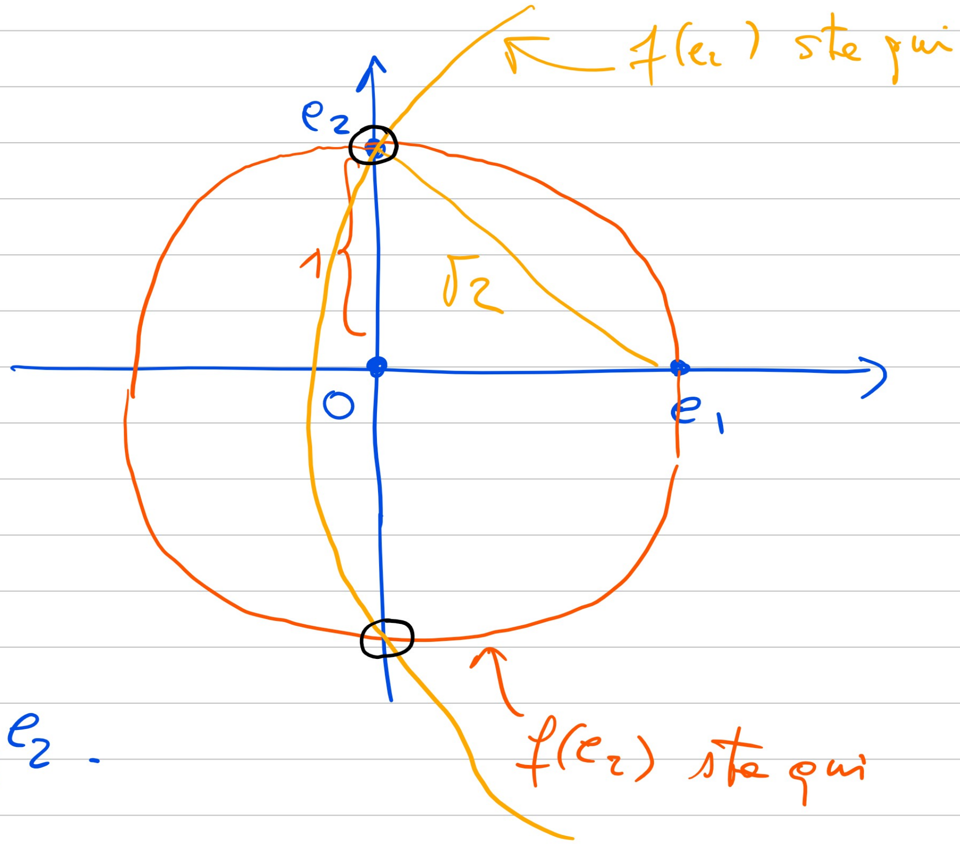
Ora ho $f(e_1) = e_1$

- Esamino $f(e_2)$:

può essere $\pm e_2$.

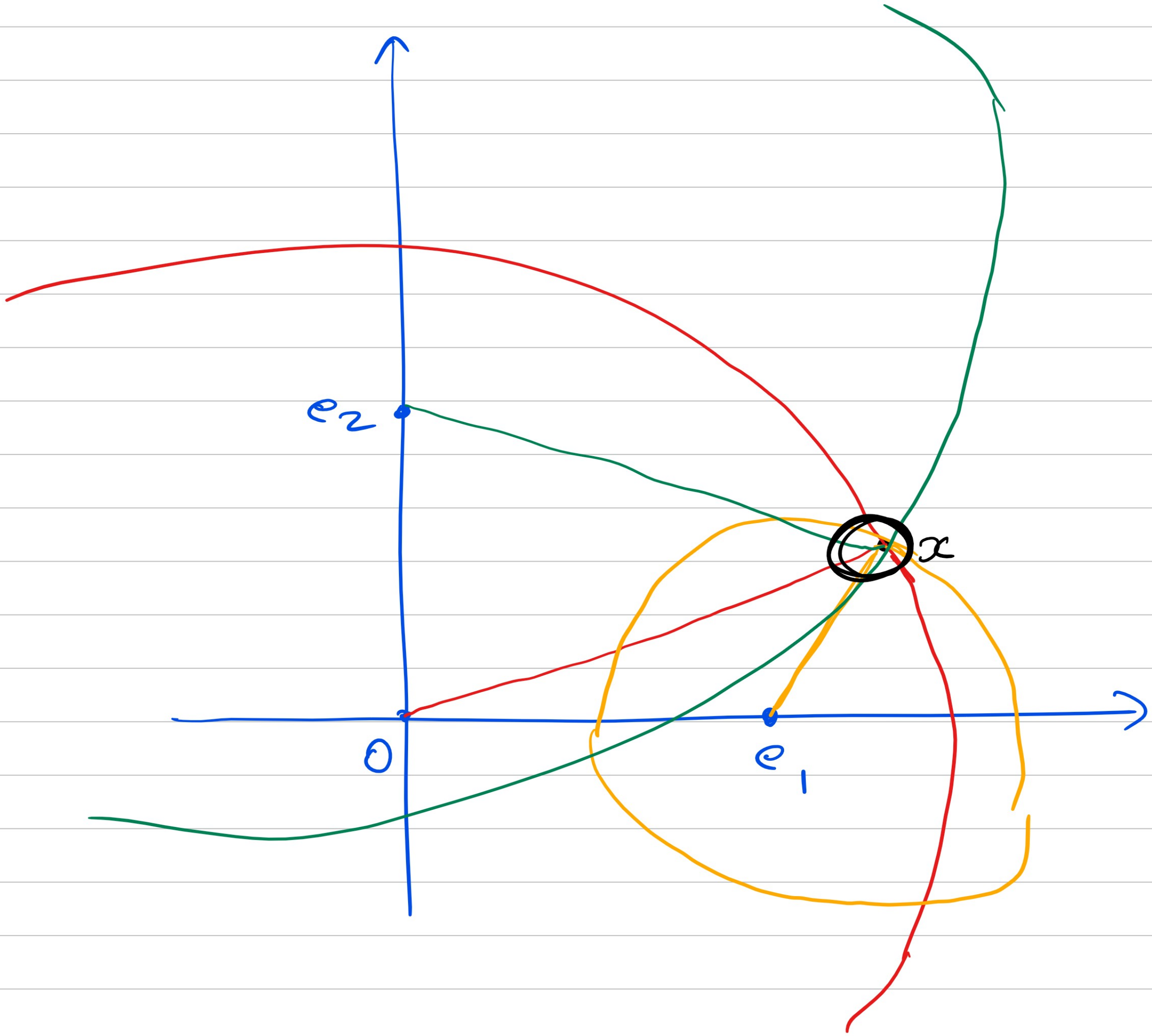
Se è e_2 ok.

Se è $-e_2$ sostituisco f con $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \circ f$.



Ora ho che f fissa $0, e_1, e_2$.

Conclusione: verifico che una isometria che fissa $0, e_1, e_2 = \mathrm{id}$:



$$\Longrightarrow f(x) = x$$

$\blacksquare$

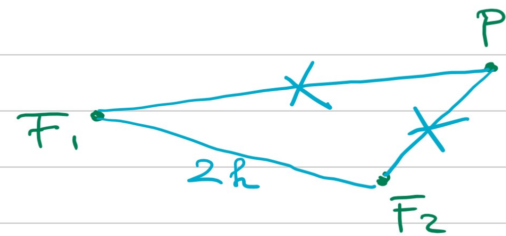
Coniche

Modelli metrici: luoghi del piano $\mathbb{R}^2$ con $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ definiti da condizioni geometriche.

CIRCONFERENZA; dato $C\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ $\quad \mathcal{C}=\{P\in\mathbb{R}^2 : d(P,C)=r\}$

Applicando una isometria (traslaz) suppongo $C=0$

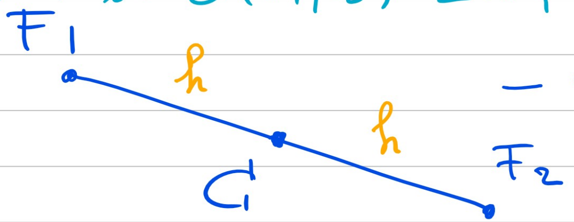
$\Longrightarrow$ equaz: $\boxed{x^2+y^2=r^2}$



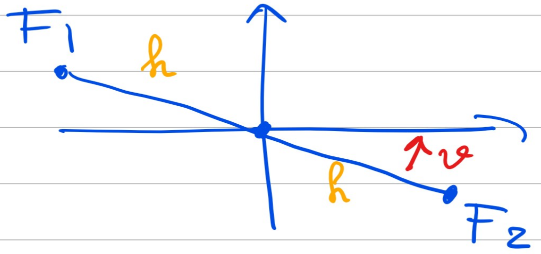
ELLISSE: dati $F_1,F_2\in\mathbb{R}^2$ distinti, $k>0$

$$\mathcal{E}=\{P\in\mathbb{R}^2 : d(F_1,P)+d(F_2,P)=2k\}$$

(condizione: se $d(F_1,F_2)=2h$, chiedo $k>h$)



- traslo in modo che C diventi O



- ruoto in modo che $F_1=(-h,0)$
  $F_2=(h,0)$

$$\mathcal{E}: \quad d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2k$$

$$\sqrt{(x-h)^2+y^2} + \sqrt{(x+h)^2+y^2} = 2k$$

$$\sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k - \sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \cancel{x^2} - 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2} = 4k^2 - 4k\sqrt{(x+h)^2+y^2} + \cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{4}k\sqrt{(x+h)^2+y^2} = \cancel{4}k^2 + \cancel{4}xh$$

$$\Longrightarrow k^2x^2 + \cancel{2k^2hx} + k^2h^2 + k^2y^2 = k^4 + \cancel{2k^2xh} + h^2x^2$$

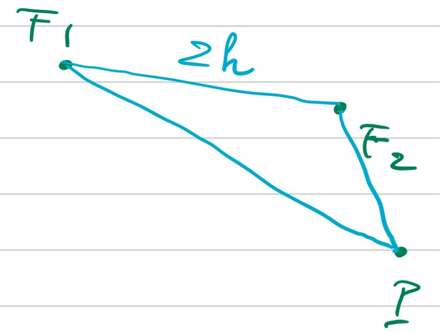
$$(k^2-h^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2-h^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$a > b > 0$

Fatto: tutti i punti che soddisfano $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ sono in $\mathcal{E}$.



<u>IPERBOLE</u>: dati $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, $F_1 \neq F_2$, $k>0$

$$\mathcal{I} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : |d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2k \}$$

<u>Condizione</u>: posto $d(F_1F_2) = 2h$ devo avere $0 < k < h$

<u>Equazione</u>: mi riduco a $(\pm h, 0)$

$$\left| \sqrt{(x-h)^2+y^2} - \sqrt{(x+h)^2+y^2} \right| = 2k$$

$$\pm \sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k \pm \sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

Come prima: stessi passaggi uccidono $\pm$

$$(k^2-h^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$$

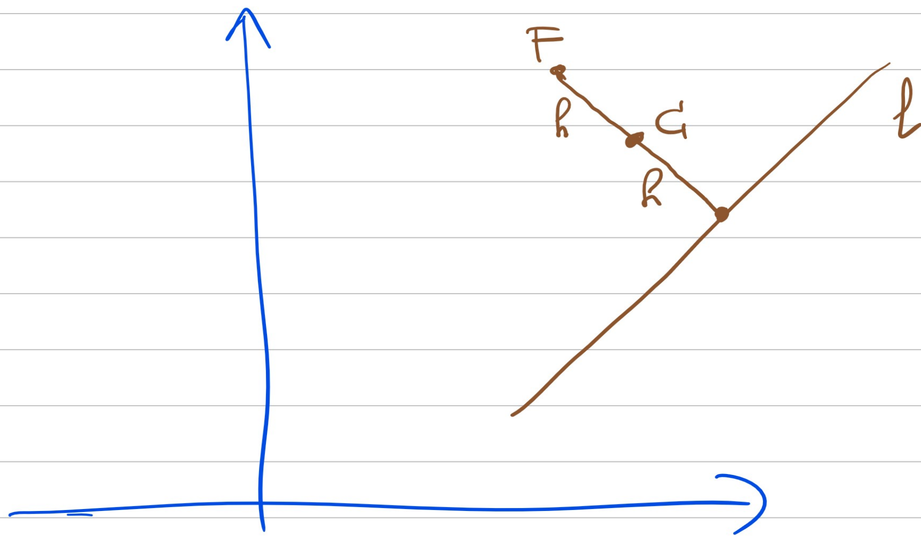
$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2-k^2} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad a, b > 0$$

$\boxed{\text{Fatto: tutti i } P \text{ che soddisfano } x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \text{ sono in } \mathcal{I}}$

PARABOLA: dato $F \in \mathbb{R}^2$, $l \subset \mathbb{R}^2$ retta $F \notin l$

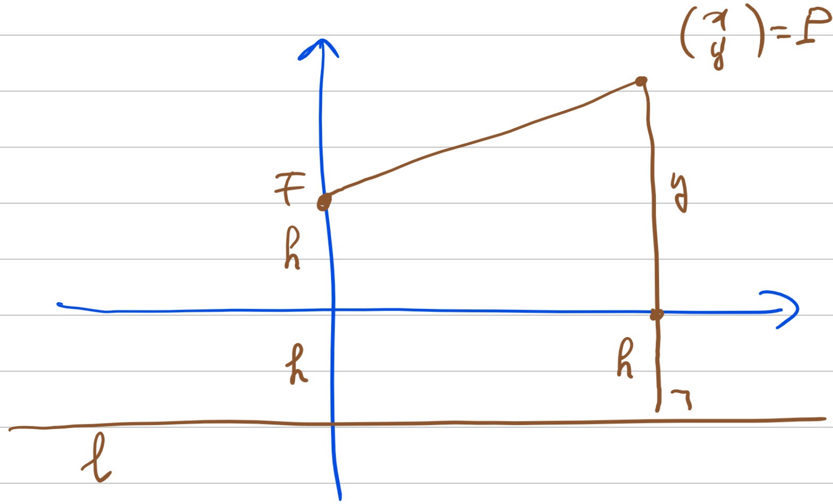
$$\mathcal{P} = \{ P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) = d(P,l) \}.$$

Equazione:



traslo G in O
e ruoto finché

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ $\quad l: y = -h$



$$\sqrt{x^2 + (y-h)^2} = y + h$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 2hy + \cancel{h^2} = \cancel{y^2} + 2hy + \cancel{h^2}$$

$$y = \frac{1}{4h} \cdot x^2$$

$$\boxed{y = ax^2}$$

Luoghi definiti da equazioni polinomiali nelle coord. di II grado.

Q: quale luogo in $\mathbb{R}^2$ è definito da una tale equazione?

facciamo una classificazione affine

cioè a meno di trasf affini

$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{equazione} \dots \right\}$

$\mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{quadr} \dots \right\}$

$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ se $\exists\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affine (non isometrica)

t.c. $f(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$.

Equazioni canoniche affini degli oggetti precedenti:

circonf/ellisse

$x^2+y^2=1$

infatti:

$x^2+y^2=r^2 \qquad \underbrace{\left(\frac{x}{r}\right)}_{X}^2 + \underbrace{\left(\frac{y}{r}\right)}_{Y}^2 = 1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)}_{X}^2 + \underbrace{\left(\frac{y}{b}\right)}_{Y}^2 = 1$

iperbole $x^2 - y^2 = 1$

parabola $y = x^2$ $y = 2x^2$ $\underbrace{y/2}_{Y} = x^2$

Oss: oltre a ell/iperb/parab altre possibilità

$\emptyset$ $x^2 + y^2 + 1 = 0$

pto $x^2 + y^2 = 0$

retta $x^2 = 0$

rette X $x^2 - y^2 = 0$ $xy = 0$

rette // $x^2 = 1$

Vedremo che ogni equaz. di II grado in $\mathbb{R}^2$ definisce uno di questi : ell/parab/iperb : NON degeneri

altre : degeneri