

Ora abbiamo dimostrato

Lemma 10.2.7

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Allora A è normale ($A^* A = A A^*$) se e soltanto se si diagonalizza tramite una matrice unitaria.

Poiché una matrice hermitiana

(ovvero $A^* = A$) è in particolare normale

$$(A A^* = A A = A^* A)$$

il Teorema enunciato sopra si applica alle matrici hermitiane.

Con ragionamenti analoghi al caso reale si ottiene

Teorema Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiana.

Allora gli autovalori di A sono reali.

Sono equivalenti:

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ ^{hermitiano} è def positivo
- A ha autovalori tutti positivi
- $d_1, d_2, \dots, d_n$ sono tutti positivi

dove

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

d_1 è il det di

d_2 è il det di 2×2

eccetera.

Esercizio 10.2.4

Verificare se A è normale e in tal caso trovare autovettori e base di $\mathbb{C}^2$ ortonormale che la diagonalizza.

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1+3i & 3-4i \\ 5 & 5i-3 \end{pmatrix}$$

Verifica che è normale.

$$A A^* = \begin{pmatrix} 1+3i & 3-4i \\ 5 & 5i-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i & 5 \\ 3+4i & -3-5i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+3i)(1-3i) + (3-4i)(3+4i) & 5(1+3i) + (3-4i) \cdot (-3-5i) \\ 5(1-3i) + (5i-3)(3-4i) & 25 + (5i-3) \cdot (-3-5i) \end{pmatrix}$$

↑
sono coniugati

ricorda che

$$(A A^*)^* = A^{**} A^* = A A^*$$

Calcolando anche $A^* A$ notati che

$\tilde{e} = A A^*$ dunque A è normale.

Per diagonalizzarla vanno cercati gli autovalori

$$P_A(t) = t^2 + 2(1-4i)t - 33+16i$$

Li risolve con la formula cd Δ

$$\Delta = 24(3-4i)$$

Devo fare " $\sqrt{\Delta}$ ". Significa

che devo trovare i due numeri complessi

$$z_1 \text{ e } z_2 \text{ t.c. } z_1^2 = \Delta, z_2^2 = \Delta$$

$$z_1 = \underline{2\sqrt{6}} (2-i)$$

$$(a+ib)^2 = 3-4i$$

$$\text{Va bene } a=2$$

$$b=-1$$

$$z_2 = -2\sqrt{6} (2-i)$$

I calcoli diventano complicati:

$$\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{6} + (4 - \sqrt{6})i$$

$$\lambda_2 = -1 - 2\sqrt{6} + (4 + \sqrt{6})i$$

Gli autovettori per esempio

$$w_1 = \left(\begin{array}{c|c} 2(1+\sqrt{6}) + (-1-\sqrt{6})i & \\ \hline 5 & \end{array} \right)$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow \\ - & + \\ & 5 \end{pmatrix}$$

Come sappiamo W_1 e W_2 sono ORTOGONALI
 (dal teorema sappiamo che le due rette
 generate dagli autovettori sono ortogonali)

Per avere la norma 1 dobbiamo prendere

$$\frac{W_1}{\|W_1\|} \quad , \quad \frac{W_2}{\|W_2\|}$$

10.2.4 e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ξ normale perché

$$A A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

NOTA Si poteva
vedere subito
che $A^* = 2A^{-1}$
e dunque dedurre
che A e A^* commutano,

$$P_A(t) = (t-1)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$V_{\lambda_1} = \text{Ker} \left((1+i)I - A \right) =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{Ker} ((1-i)I - A) =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Come sappiamo dal teorema

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ sono ortogonali.

Verifica (non occorre)

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ & = \overline{(i \ i \ 1)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \\ & = (-i, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i + i = 0 \end{aligned}$$

Per avere una base ORTONORMALE

prendo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

A PROFONDIMENTO SULL'ENUNCIATO DE TEOREMA 10.2.7

$$U^{-1} A U = \text{diagonale}$$

Nel caso $\mathbb{C}^2$,

$$U = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 nuova base

dove che U è unitaria significa che
che v_1 e v_2 sono ortonormali.

Nello svolgere l'esercizio io ho trovato

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ autovettori}$$

Devono essere rispettivamente multipli
di v_1 e v_2

perché

V_{λ_1} ha dimensione 1 ed è

$$= \text{Lspan} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) = \text{Lspan} (v_1)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} (v_2)$$

Poiché so che $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$

$$\text{so che } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

5 10.2.5 Verificare che A è unitaria

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-i & -2-i & 1-i \\ 2+i & i-1 & i-1 \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{pmatrix}$$

Cosa dovete fare?

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

questo equivale a controllare che le righe siano ORTONORMALI fra loro

rispetto al prod. hermitiano standard.

$$\langle \text{prima riga} \mid \text{prima riga} \rangle =$$

$$\frac{1}{9} \left[(1+i)(1-i) + (-2+i)(-2-i) + (1+i)(1-i) \right]$$

$$= \frac{1}{9} [2 + 5 + 2] = \frac{9}{9} = 1$$

$$\langle \text{prima riga} \mid \text{seconda riga} \rangle = 0$$

e così via, 6 controlli in tutto.